Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2020)

Guía de Trabajos Prácticos Nº6

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática y expresarla en la forma $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica.

(**a**) $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 16x_2x_3 + 26x_1x_2$.

(**b**) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

(**c**) $Q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.

---

2. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q(x) = -5x_1^2 - 2x_1^2 + 4x_1x_2$.

(**c**) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

---

3. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(**b**) $Q(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3$.

(**c**) $Q(x) = x_3^2 + x_1x_2$

---

4. Clasificar cada una de las formas cuadráticas que aparecen en los **Ejercicios 2. y 3.** y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$

---

5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$,

$$Q(x) = 2x_1^2 + ax_1x_2 + 18x_2^2,$$

es definida postiva.

---

6. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, A es definida positiva.

---

7. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por $\langle x, y\rangle_A := y^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\theta \in (0, \pi)$.

(**a**) Observar que $Q_A(x) = \langle x, x\rangle_A$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$.

(**b**) Hallar una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con $\det(P) = 1$ tal que el cambio de variable ortogonal $x = Py$ transforme la forma cuadrática $Q_A(x)$ en una forma cuadrática sin productos cruzados.

(**c**) ¿Cuáles son los ejes principales de la forma cuadrática $Q_A(x)$?

(**d**) Graficar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q_A) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : Q_A(x) = 1\big\}$.

(**e**) ¿Cómo son los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q_A)$ con $c > 0$?

---

8. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2$$

(**a**) Hallar los valores máximo y mínimo de los cocientes de Rayleigh

$$\frac{Q(x)}{\|x\|^2}, \qquad x \neq 0.$$

(**b**) Hallar el conjunto de todos $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

(**c**) Hallar el conjunto de todos $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

(**d**) Hallar el conjunto de todos $\hat{x}_M \in S_3$ tales

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{\|x\|=1} Q(x).$$

(**e**) Hallar el conjunto de todos $\hat{x}_m \in S_3$ tales

$$Q(\hat{x}_m) = \min_{\|x\|=1} Q(x).$$

: *recordar que* $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

---

9. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por $Q(x) = x^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$.

(**b**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.

(**c**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.

(**d**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q(x)$.

(**e**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q(x)$.

---

10. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(**a**) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$.

(**b**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.

(**c**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.

(**d**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q(x)$.

(**e**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q(x)$.

---

11. Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$Q_1(x) = x_1x_2, \qquad Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2.$$

(**a**) Hallar $\max\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\min\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$.

(**b**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1(x)$.

(**c**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1(x)$.

---

12. En cada uno de los siguientes casos, hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$, para

(**a**) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q_2(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

:*¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos?*

---

13. Sean $\theta \in (0, \pi)$. Hallar los puntos de la curva de ecuación

$$x_1^2 + 2\cos\theta x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

cuya distancia al origen sea mínima y cuya distancia al origen sea máxima.

:*¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos?*