



Matrices normales

Teorema espectral

Conceptos preliminares

Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es *diagonalizable* en $\mathbb{K}^n$ si existe una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A . En tal caso, la matriz A es semejante a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regular tal que $A = PD_AP^{-1}$, con D_A diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores de A y las columnas de la matriz P son los autovectores de A correspondientes a cada uno de los autovalores.

En todo este capítulo consideraremos el producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$:

$$\langle x, y \rangle = y^* x, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Recordemos que y^* designa el vector y transpuesto y conjugado.

Utilizaremos $\mathbb{K}^n$ ó $\mathbb{K}^{n \times n}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ cuando las proposiciones sean aplicables a elementos de ambos espacios.

Trabajaremos con distintas clases de matrices:

En $\mathbb{K}^{n \times n}$:

Matrices simétricas: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *simétrica* si $A^T = A$.

Matrices ortogonales: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *ortogonal* si $AA^T = A^T A = I_n$. Las matrices ortogonales tienen columnas ortonormales.

Matrices antisimétricas: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *antisimétrica* si $A^T = -A$.

En $\mathbb{C}^{n \times n}$:

Matrices hermíticas: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es *hermítica* si $A^* = A$, donde A^* denota la matriz transpuesta y conjugada de A , llamada matriz *adjunta* de A .

Matrices unitarias: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es *unitaria* si $AA^* = A^* A = I_n$. Las matrices unitarias tienen columnas ortonormales.

Matrices antihermíticas: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es *antihermítica* si $A^* = -A$.

Relaciones entre las matrices A y A^*

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$; entonces si $x, y \in \mathbb{K}^n$:

1. $\langle x, Ay \rangle = (Ay)^* x = y^* A^* x = \langle A^* x, y \rangle$.
2. $\text{Nul}(A^*) = (\text{Col}(A))^\perp$. Para demostrarlo hay que probar la doble inclusión:

(a) $\text{Nul}(A^*) \subseteq (\text{Col}(A))^\perp$

Sea $x \in \mathbb{K}^n$; entonces $x \in \text{Nul}(A^*) \Leftrightarrow A^* x = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \langle A^* x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathbb{K}^n$

Como $\langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, resulta que $\langle x, Ay \rangle = 0$, y, dado que $Ay \in \text{Col}(A)$, se concluye que $x \in (\text{Col}(A))^\perp$.

(b) $(\text{Col}(A))^\perp \subseteq \text{Nul}(A^*)$

$x \in (\text{Col}(A))^\perp \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \text{Col}(A)$. Si $y \in \text{Col}(A)$: $y = Au$ para algún $u \in \mathbb{K}^n$; luego $\langle x, Au \rangle = 0$;

como $\langle x, Au \rangle = \langle A^* x, u \rangle = 0$, para que esta igualdad se verifique para cualquier $u \in \mathbb{K}^n$ debe ser $A^* x = 0_{\mathbb{K}^n}$; luego $x \in \text{Nul}(A^*)$.



3. $\text{Col}(A) = (\text{Nul}(A^*))^\perp$

Se obtiene de (2), considerando $((\text{Col}(A))^\perp)^\perp = \text{Col}(A)$.

4. $\text{Nul}(A) = (\text{Col}(A^*))^\perp$

Se obtiene de (2) intercambiando A^* y A .

5. $\text{Col}(A^*) = (\text{Nul}(A))^\perp$

Se obtiene de (3) intercambiando A^* y A .

Matrices hermíticas

Los siguientes resultados son válidos también para matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si A es hermítica ($A^* = A$) entonces:

1. Si $x, y \in \mathbb{C}^n$: $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

En efecto: $\langle x, Ay \rangle = (Ay)^* x = y^* A^* x = \langle A^* x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$.

2. Los autovalores de A son reales.

Dado que $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$, para $y = x$ resulta $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$. Si λ es autovalor de A , sea x un autovector de A de norma 1 asociado a λ ,

$$\lambda = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \bar{\lambda}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplos: Los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y de $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$

3. Los autoespacios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, esto es, si λ y μ son dos autovalores distintos de la matriz A , entonces $S_\lambda \perp S_\mu$.

Hay que probar que si $x \in S_\lambda$ y $y \in S_\mu$: $\langle x, y \rangle = 0$.

Como λ y $\mu \in \mathbb{R}$: $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$.

Luego, $\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$

Entonces, $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$; como $\lambda \neq \mu$, resulta $\lambda - \mu \neq 0$ y por lo tanto $\langle x, y \rangle = 0$.

4. Existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A .

Para probarlo emplearemos el siguiente

Lema. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $A^* = A$. Entonces, si λ es autovalor de A , sus multiplicidades algebraica y geométrica coinciden: $m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los distintos autovalores de A . Como para cada uno de ellos

$$m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i), \quad \forall i : 1 \leq i \leq k$$

$$\text{entonces } \mathbb{C}^n = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_k} \quad (1)$$

Por otra parte, por la propiedad (3), $S_{\lambda_i} \perp S_{\lambda_j}$ si $i \neq j$.

Luego, para cada S_{λ_i} elegimos una base ortonormal, y como la suma (1) es directa, resulta

$$B_{\mathbb{C}^n} = B_{S_{\lambda_1}} \cup \dots \cup B_{S_{\lambda_k}}$$

y así tenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A .

Por lo tanto la matriz A es diagonalizable unitariamente, es decir, A admite una descomposición de la forma $A = UD_AU^*$, con U unitaria.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente, es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es tal que $A^T = A$, entonces existe $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $A = PD_AP^T$.

Observación. Una matriz diagonalizable unitariamente no necesariamente es hermítica, como se muestra a continuación:

Ejemplo. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es hermítica. Sus autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$.

Los autoespacios asociados son: $S_{\lambda_1=i}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix}^T \right\}$ y $S_{\lambda_2=-i}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T \right\}$.

Observar que $\langle \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T \rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i - i = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrices unitarias

Sea $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si U es unitaria ($UU^* = U^*U = I_n$) entonces:

1. Sus autovalores tienen módulo 1.

Si λ es autovalor de U asociado al autovector $x \in \mathbb{C}^n$: $Ux = \lambda x$.

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \bar{\lambda} = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

$$\text{Por otra parte, } \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = (Ux)^* Ux = x^* U^* Ux = x^* x = \|x\|^2$$

Por lo tanto, $|\lambda|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2$; como $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, debe ser $|\lambda|^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$.

2. El determinante de una matriz unitaria tiene módulo 1.
3. Si $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices unitarias, entonces UV es unitaria.
4. Para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$: $\langle Ux, Uy \rangle = (Uy)^* Ux = y^* (U^* U)x = y^* x = \langle x, y \rangle$.
La multiplicación por una matriz unitaria preserva el producto interno.

5. Si $x \in \mathbb{C}^n$ entonces $\|Ux\| = \|x\|$.

La multiplicación por una matriz unitaria preserva las longitudes, es decir, la transformación lineal $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una *isometría*.

6. Los autovectores de una matriz unitaria asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Sean x, y autovectores de U asociados a los autovalores λ y μ , respectivamente. De la propiedad (4): $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. (1)

Por otra parte, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle$ (2)

Entonces, de (1) y (2): $\langle x, y \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle$

$(\lambda \bar{\mu} - 1) \langle x, y \rangle = 0$, como λ y μ son distintos, el producto $\lambda \bar{\mu}$ no es igual a 1; en efecto, como $|\bar{\mu}| = 1$ resulta $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$, de modo que $\lambda \bar{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1$.

Luego, para que la igualdad se cumpla debe ser $\langle x, y \rangle = 0$ y así, $x \perp y$.

7. La matriz U es inversible y $U^{-1} = U^*$.

Como los autovalores de U tienen módulo 1 y el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores, se concluye que el determinante de U es distinto de cero, con lo cual U resulta inversible. Por otra parte, dado que $U^*U = UU^* = I$, por definición de matriz inversa es $U^* = U^{-1}$.

8. U es unitaria si y sólo si U^* es unitaria.

U es unitaria $\Leftrightarrow U^*U = UU^* = I \Leftrightarrow (U^*U)^* = (UU^*)^* = I^* \Leftrightarrow U^*(U^*)^* = (U^*)^*U^* = UU^* = I$, y por lo tanto, las filas de U son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.



Matrices antihermíticas

Los siguientes resultados son válidos también para matrices antisimétricas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si A es antihermítica ($A^* = -A$) entonces:

1. Para todo $x \in \mathbb{C}^n$: x^*Ax es imaginario puro o cero.
2. Los autovalores de A son imaginarios puros o cero.
3. Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.
4. Existe $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $A = UD_AU^*$.

Semejanza de matrices

Recordemos la definición de matrices semejantes.

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *semejante* a otra matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ si existe una matriz regular $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ porque $A = PBP^{-1}$, siendo $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y por ende, los mismos autovalores), el mismo determinante y la misma traza.



Observación. La afirmación recíproca de la anterior es falsa. En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las matrices A y B tienen los mismos autovalores, el mismo determinante y la misma traza pero no son semejantes, porque si lo fueran, existiría P regular tal que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I$, pero $A \neq I$.

Por último, dos matrices A y B son *unitariamente semejantes* si y sólo si existe una matriz $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria tal que $B = UAU^*$.

En síntesis, las matrices $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que hemos estudiado (hermíticas, unitarias y antihermíticas, y, en el caso real, simétricas, ortogonales y antisimétricas) pertenecen a un conjunto de matrices denominadas *normales*, que verifican $AA^* = A^*A$ ($AA^T = A^T A$, en el caso real) es decir, matrices que conmutan con su adjunta.



Asimismo, algunas de las propiedades que hemos estudiado se resumen en el llamado

Teorema espectral

Caso complejo Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz A es normal.
2. Existe una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A .
3. A es unitariamente semejante a una matriz diagonal.

Caso real Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz A es normal.
 2. Existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A .
 3. A es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.
- 

Matrices definidas y semidefinidas positivas

Definición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *definida positiva* si y sólo si $A^* = A$ y $x^*Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

Definición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *semidefinida positiva* si y sólo si $A^* = A$ y $x^*Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$.

Proposición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si todos los autovalores son positivos.

$\Rightarrow$) Sea $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$: $Ax = \lambda x$; como A es hermítica $\lambda \in \mathbb{R}$
entonces: $x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda x^*x = \lambda \|x\|^2 > 0$. Dado que $\|x\|^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, para que el producto sea positivo debe ser $\lambda > 0$.

$\Leftarrow$) como A es hermítica existe una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A .
Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$, siendo $Av_i = \lambda_i v_i$

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$Ax = A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

Calculamos $x^* Ax$:

$$x^* Ax = \left(\sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j v_j^* \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_j \alpha_i \lambda_i v_j^* v_i =$$

Obsérvese que cuando $i \neq j : \langle v_i, v_j \rangle = v_j^* v_i = 0$.

$$= \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \alpha_i \lambda_i \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i > 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$$



Otro criterio para determinar si una matriz es definida positiva es el siguiente:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si todos los menores principales de A son positivos, esto es, $\det(A_k) > 0, \quad \forall k : 1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11}) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ A_n &= A \end{aligned}$$

$$\det(A_1) > 0 \wedge \det(A_2) > 0 \wedge \cdots \wedge \det(A) > 0$$

Para matrices semidefinidas positivas todos menores principales tienen que ser no negativos y todos los autovalores deben ser no negativos.



Ejemplo

Determinar para qué valores de α la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$ es definida positiva.

i. $A^T = A$

ii. $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2\alpha \\ 2\alpha & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 - 2\alpha \vee \lambda = 1 + 2\alpha$

$$A \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow 1 - 2\alpha > 0 \wedge 1 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1/2 \wedge \alpha < 1/2 \Leftrightarrow |\alpha| < 1/2$$

Ejemplo

Sea la proyección

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sobre cierto subespacio $S \subset \mathbb{R}^3$. Probar que $[T]_{E_{\mathbb{R}}^3}$ es semidefinida positiva.

La matriz $A = [T]_{E_{\mathbb{R}}^3}$ cumple que $A^T = A$ y sus autovalores son $\lambda_1 = 0$ (doble), $\lambda_2 = 1$.

Luego, la matriz A es semidefinida positiva.

También podemos calcular los subdeterminantes de A :

$$\det(1/2) = 1/2 > 0 \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

Isometrías

El operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : T(x) = Ax$, con $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, que es la rotación de ángulo θ , en sentido antihorario alrededor del origen de coordenadas, es una isometría. Dado que la matriz A es ortogonal, cada vector de $\mathbb{R}^2$ y su transformado tienen la misma longitud, esto es, T preserva la norma.

La matriz asociada $A = [T]_{E_{\mathbb{R}^2}}$, donde $E_{\mathbb{R}^2}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, no tiene autovalores en $\mathbb{R}$ si $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno. Entonces el operador $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es una *isometría* si

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y)$$

donde d es la *distancia* entre dos elementos de $\mathbb{V}$.

Proposiciones

1. T es una isometría si y sólo si preserva la norma.

$$\Rightarrow) \forall x \in \mathbb{V} : \|T(x)\| = d(T(x), 0) = d(x, 0) = \|x\|$$

$$\Leftarrow) \forall x, y \in \mathbb{V} : d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

2. T preserva el producto interno si y sólo si preserva la norma.

$$\Rightarrow) \forall x, y \in \mathbb{V} : \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle; \text{ si } x = y : \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|x\|. \text{ Luego } T \text{ preserva la norma.}$$



$\Leftarrow$) En el caso real:

$$\begin{aligned}\text{Si } \|T(x)\| &= \|x\| \Rightarrow \langle T(x), T(y) \rangle = \frac{1}{4} (\|T(x) + T(y)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\|T(x + y)\|^2 - \|T(x - y)\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) = \frac{1}{4} (4\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

En el caso complejo: Si $\|T(x)\| = \|x\| \Rightarrow \langle T(x), T(y) \rangle =$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} (\|T(x) + T(y)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2 + i\|T(x) + iT(y)\|^2 - i\|T(x) - iT(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)\end{aligned}$$

Operando como en el caso anterior, resulta: $= \frac{1}{4} (4\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle$

Por lo tanto, T preserva el producto interno.



Observación

El operador $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : T(x) = Ux$, con $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria, es una isometría, ya que:

$$\langle T(x), T(x) \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = (Ux)^* Ux = x^* U^* Ux = x^* x = \langle x, x \rangle$$

Luego $\|T(x)\| = \|x\|$ y por lo tanto preserva el producto interno.

si T está definida como $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : T(x) = Px$, con $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces, además de preservar la norma y el producto interno, preserva los ángulos:

$$\cos \left(\widehat{T(x), T(y)} \right) = \frac{\langle T(x), T(y) \rangle}{\|T(x)\| \|T(y)\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \cos \left(\widehat{x, y} \right)$$

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la reflexión sobre el subespacio $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Considerando el producto interno canónico, hallar $[T]_{E_{\mathbb{R}^3}}$ y comprobar que es ortogonal, y por lo tanto T es una isometría.

Sea $B = \{v_1 = (1 \ 1 \ 0)^T, v_2 = (0 \ 1 \ 1)^T, v_3 = (1 \ -1 \ 1)^T\}$, $v_1, v_2 \in S$ y $v_3 \in S^\perp$. Luego:

$$\begin{aligned}T(v_1) &= v_1 \\T(v_2) &= v_2 \\T(v_3) &= -v_3\end{aligned}$$

entonces B es una base de autovectores y $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = -1$ son autovectores de T .

$$[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = M_B^{E_{\mathbb{R}^3}} [T]_B M_{E_{\mathbb{R}^3}}^B$$

$$\begin{aligned}[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

esta matriz tiene columnas ortonormales.

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje x_3 :

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la matriz

$$A = [T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, y por lo tanto la transformación T es una isometría.

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) (\lambda^2 - 2\cos \theta \lambda + 1) = 0$$

y sus soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, $\lambda_3 = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$;

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1$ es el conjunto solución del sistema $\begin{cases} (\cos \theta - 1)x_1 - \operatorname{sen} \theta x_2 = 0 \\ \operatorname{sen} \theta x_1 + (\cos \theta - 1)x_2 = 0 \end{cases}$

como $\det \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} = (\cos \theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \operatorname{sen}^2 \theta =$
 $= 2 - 2 \cos \theta = 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$, el sistema tiene únicamente la solución $x_1 = x_2 = 0$;

si $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; en este caso, los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 1$ son de la forma $(0 \ 0 \ x_3)^T$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $\theta = 2k\pi$:, $A = I_{3 \times 3}$ y en este caso cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es un autovector.

Si $\theta = (2k + 1)\pi, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, sus autovectores son todos los del plano $x_3 = 0$; en este caso tenemos una simetría con respecto al eje x_3 .