

Semana 19

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 8 a 13 de la Guía 6. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Optimización de formas cuadráticas

El siguiente ejercicio nos va a permitir entender la demostración del Teorema de Rayleigh que veremos luego.

Ejercicio 8: Sea $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2.$$

- a) Hallar los valores máximos y mínimos de los *cocientes de Rayleigh*

$$\frac{Q(x)}{\|x\|^2}, \quad x \neq 0.$$

- b) Hallar el conjunto de todos los $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

- c) Hallar el conjunto de todos los $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

- d) Hallar el conjunto de todos los $\hat{x}_M \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x).$$

- e) Hallar el conjunto de todos los $\hat{x}_m \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_m) = \min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x).$$

Como Q no tiene productos cruzados nos va a resultar sencillo resolver el ejercicio. Luego veremos cómo vamos a proceder en el caso en que Q tenga productos cruzados.

Dem. a) : Observar que, como $-3x_1^2 \leq 5x_2^2$ y $2x_3^2 \leq 5x_4^2$, tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^4$,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 \leq 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 = 5\|x\|^2.$$

Por otro lado, como $-3x_1^2 \leq 5x_1^2$, $-3x_3^2 \leq 2x_3^2$ y $-3x_4^2 \leq 5x_4^2$, tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^4$,

$$-3\|x\|^2 = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 \leq Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2.$$

Por lo tanto,

$$-3\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 5\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^4.$$

Con lo cual, si $x \neq 0$, tenemos que

$$-3 \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq 5 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}.$$

Veamos entonces, que el máximo del cociente de Rayleigh es 5 y el mínimo del cociente de Rayleigh es -3 . Como ya vimos que 5 es una cota superior y -3 es una cota inferior del cociente de Rayleigh, sólo nos resta encontrar algún $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tal que $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = 5$ y algún $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tal que $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = -3$.

Observar que $x_M := [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $Q(x_M) = 5$ y $\|x_M\| = 1$. Entonces $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = 5$ y concluimos que

$$\max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5.$$

Por otra parte, $x_m := [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $Q(x_m) = -3$ y $\|x_m\| = 1$. Entonces $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = -3$ y concluimos que

$$\min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3.$$

b) : Queremos hallar el conjunto de todos los $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5$.

Planteamos para qué valores de $x \in \mathbb{R}^4$ tenemos que $Q(x) = 5\|x\|^2$ y eso vale, si y sólo si,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 = 5\|x\|^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2.$$

Entonces,

$$8x_2^2 + 3x_3^2 = 0.$$

Por lo tanto, $x_2 = x_3 = 0$. Entonces,

$$Q(x) = 5\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x = [x_1 \ 0 \ 0 \ x_4] \text{ con } x_1, x_4 \in \mathbb{R}$$

ó, equivalentemente, $Q(x) = 5\|x\|^2$ si y sólo si $x \in \text{gen}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$.

Por lo tanto, si $x_M \in \text{gen}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5.$$

c) : Para hallar el conjunto de todos los $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3$.

Planteamos para qué valores de $x \in \mathbb{R}^4$ tenemos que $Q(x) = -3\|x\|^2$ y eso vale, si y sólo si,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 = -3\|x\|^2 = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2.$$

Entonces,

$$8x_1^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 = 0.$$

Por lo tanto, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Entonces,

$$Q(x) = -3\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x = [0 \ x_2 \ 0 \ 0] \text{ con } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ó, equivalentemente } Q(x) = -3\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\}.$$

Por lo tanto, si $x_m \in \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3.$$

d) : En el ítem b), vimos que $Q(x) = 5\|x\|^2$ si y sólo si $x \in \text{gen}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$. Si ahora imponemos la restricción $x \in S_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$, tenemos que

$$\max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x) = 5$$

y los $\hat{x}_M \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x) = 5$$

son los $x \in \text{gen}\{[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$ tales que $\|x\| = 1$. Entonces, el máximo se alcanza en los vectores $\hat{x}_M = \alpha[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + \beta[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que (aplicando Pitágoras o haciendo la cuenta)

$$1 = \|x\|^2 = \|\alpha[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + \beta[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\|^2 = \alpha^2\|[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T\|^2 + \beta^2\|[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T\|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Entonces, el máximo se alcanza en los vectores $\hat{x}_M = \alpha[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + \beta[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

e) : En el ítem c), vimos que $Q(x) = -3\|x\|^2$ si y sólo si $x \in \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\}$. Si ahora imponemos la restricción $x \in S_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$, tenemos que

$$\min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x) = -3$$

y los $\hat{x}_m \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_m) = \min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x) = -3$$

son los $x \in \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\}$ tales que $\|x\| = 1$. Entonces, el mínimo se alcanza en los vectores $\hat{x}_m = \alpha[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $1 = \|x\| = \|\alpha[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\| = |\alpha|\|[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\| = |\alpha|$. Entonces, $\alpha = \pm 1$ y, el mínimo se alcanza en los vectores $\hat{x}_m = \pm[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$. $\square$

Teorema 1 (Teorema de Rayleigh). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y $Q(x) = x^T A x$. Sean λ_M y λ_m los autovalores máximo y mínimo de A respectivamente y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autespacios asociados respectivos. Entonces:

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \text{ Además,}$$

$$Q(x) = \lambda_m \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} \text{ y } Q(x) = \lambda_M \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}.$$

Lo vamos a demostrar de manera sencilla usando las ideas del **Ejercicio 8**.

Dem. Sea $A = P \Lambda P^T$ una descomposición ortogonal de A , que existe pues A es simétrica. Supongamos que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_M & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Donde $\lambda_M = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \cdots > \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \lambda_m$. Es decir, ordenamos los autovalores de A de mayor a menor y suponemos que la multiplicidad algebraica (y geométrica) de λ_M es r y la multiplicidad algebraica (y geométrica) de λ_m es k .

Entonces, si $P = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$, tendremos que

$$\mathcal{S}_{\lambda_M} = \text{gen}\{v_1, \dots, v_r\} \text{ y } \mathcal{S}_{\lambda_m} = \text{gen}\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}.$$

Si hacemos el cambio de variables $x = Py$, por un lado, como P es ortogonal, vale que

$$\|x\| = \|Py\| = \|y\|$$

y, por el otro lado,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (Py)^T A (Py) = y^T \Lambda y := \tilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &= \lambda_M y_1^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2 = \lambda_M y_1^2 + \cdots + \lambda_M y_r^2 + \cdots + \lambda_m y_{n-k+1}^2 + \cdots + \lambda_m y_n^2. \end{aligned}$$

Entonces, usando ideas similares a las del **Ejercicio 8**, tenemos que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_m \|y\|^2 \leq \tilde{Q}(y) \leq \lambda_M \|y\|^2.$$

Usado que $\|x\| = \|y\|$, nos queda que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_m \|x\|^2 = \lambda_m \|y\|^2 \leq \tilde{Q}(y) = Q(x) \leq \lambda_M \|y\|^2 = \lambda_M \|x\|^2.$$

Entonces, probamos que

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte, también usando ideas similares a las del **Ejercicio 8**, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = \lambda_M \|y\|^2 = \lambda_M \|x\|^2,$$

si y sólo si $y \in \text{gen}\{e_1, \dots, e_r\}$ donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, como $x = Py = [v_1 \ \dots \ v_r \ \dots \ v_{n-k+1} \ \dots \ v_n]y$, nos queda que

$$Q(x) = \lambda_M \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \text{gen}\{v_1, \dots, v_r\} = \mathcal{S}_{\lambda_M}.$$

De la misma manera, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = \lambda_m \|y\|^2 = \lambda_m \|x\|^2,$$

si y sólo si $y \in \text{gen}\{e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$. Entonces, como $x = Py[v_1 \ \dots \ v_r \ \dots \ v_{n-k+1} \ \dots \ v_n]y$, nos queda que

$$Q(x) = \lambda_m \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \text{gen}\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\} = \mathcal{S}_{\lambda_m}.$$

□

A partir del Teorema de Rayleigh que acabamos de probar, es inmediato ver que:

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y $Q(x) = x^T A x$. Si λ_M y λ_m son los autovalores máximo y mínimo de A respectivamente y $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autespacios asociados respectivos. Entonces:

$$\max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_M \text{ y el máximo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_M} \setminus \{0\}.$$

$$\min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_m \text{ y el máximo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} \setminus \{0\}.$$

En particular, $\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M$ y el máximo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$ tales que $\|x\| = 1$ y

$\min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m$ y el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ tales que $\|x\| = 1$.

Ejercicio 10: Sea $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

- Hallar $\max_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min_{\|x\|=1} Q(x)$.
- Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.
- Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.
- Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan Q .
- Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan Q .

Observar que $Q(x) = x^T A x$, con $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ simétrica. El polinomio característico

de A es $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 234\lambda + 648$ y sus raíces son $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = 6$. Por otra parte,

$$\mathcal{S}_{\lambda_1=12} = \text{nul}(A - 12I) = \left[\begin{array}{ccc} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right] = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda_2=9} = \text{nul}(A - 9I) = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right] = \text{gen}\left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \right\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda_2=6} = \text{nul}(A - 6I) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{array} \right] = \text{gen}\left\{ \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right\}.$$

Entonces, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right], \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$. Tomamos

$$P := \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{array} \right]$$

entonces $\det(P) = 1$ y una diagonalización ortogonal de A es

$$A = P \left[\begin{array}{ccc} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right] P^T.$$

Dem. a) : Usando la diagonalización ortogonal de A y el Teorema de Rayleigh, tenemos que

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M = 12 \text{ y } \min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m = 6.$$

b) : Usando la diagonalización ortogonal de A y el Teorema de Rayleigh, tenemos que los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh son los

$$x \in \mathcal{S}_{\lambda_M=12} \setminus \{0\} = \text{gen}\left\{ \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right] \right\} \setminus \{0\}.$$

c) : Usando la diagonalización ortogonal de A y el Teorema de Rayleigh, tenemos que los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh son los

$$x \in \mathcal{S}_{\lambda_m=6} \setminus \{0\} = \text{gen}\left\{ \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \right\} \setminus \{0\}.$$

d) : Por el item b), x maximiza el cociente de Rayleigh si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M=12} \setminus \{0\} = \text{gen}\left\{ \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right] \right\} \setminus \{0\}$. En este item, buscamos de entre esos x aquellos que pertenecen a S_2 . En-

tonces, el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan Q son los x de la forma $x = \alpha \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right]$ con

$\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$1 = \|x\| = \|\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\| = |\alpha| \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = |\alpha|\sqrt{6}.$$

Entonces $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ y los $x \in S_2$ que maximizan Q son $\hat{x}_M = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

e) : Por el item c), x minimiza el cociente de Rayleigh si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m=6} \setminus \{0\} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \setminus \{0\}$. En este item, buscamos de entre esos x aquellos que pertenecen a S_2 . En-

tonces, el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan Q son los x de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$1 = \|x\| = \|\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\| = |\alpha| \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = |\alpha|\sqrt{2}.$$

Entonces $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ y los $x \in S_2$ que minimizan Q son $\hat{x}_m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. □

Ejercicio de examen: Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: sean

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \text{ y } R(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Entonces

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \max_{\|x\|=1} R(x).$$

Dem. La afirmación es FALSA.

Por el Teorema de Rayleigh, claramente

$$\max_{\|x\|=1} R(x) = 2,$$

esto es debido a que el máximo autovalor de la matriz simétrica (en particular diagonal) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es 2.

Por otra parte, si llamamos $C := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $Q(x) = x^T C x$. El polinomio característico de C es

$$p_C(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Por lo tanto, los autovalores de C son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Sin embargo, como C claramente NO es simétrica NO podemos aplicar el Teorema de Rayleigh. Para aplicar el Teorema de Rayleigh

necesitamos escribir a Q como $Q(x) = x^T A x$ con A simétrica. Si recordamos lo que hicimos la semana anterior, vimos que tomando

$$A := \frac{C + C^T}{2} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $Q(x) = x^T A x$ y ahora A es simétrica. Ahora sí podemos aplicar el Teorema de Rayleigh. El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{7}{4}$$

y sus raíces son $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto, por el Teorema de Rayleigh,

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \neq 2 = \max_{\|x\|=1} R(x)$$

y concluimos que la afirmación es FALSA. □

Ejercicio de examen: Sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica con autovalores $-2, -1, 1$. Hallar todos los $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$-2 \leq x^T (B + rI) x \leq 16 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2.$$

Dem. Sea $Q(x) := x^T A x$ donde $A := B + rI$. Como B es simétrica, A también es simétrica. De hecho

$$A^T = (B + rI)^T = B^T + (rI)^T = B + rI = A.$$

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de B , entonces $Bv = \lambda v$, para cierto $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Entonces, como

$$Av = (B + rI)v = Bv + rv = \lambda v + rv = (\lambda + r)v,$$

tenemos que $\lambda + r$ es un autovalor de A con el mismo autovector asociado.

Por lo tanto, los autovalores de A (ordenados de mayor a menor) son: $\lambda_1 = 1 + r$, $\lambda_2 = -1 + r$ y $\lambda_3 = -2 + r$. Sean $\lambda_M = 1 + r$ y $\lambda_m = -2 + r$ el mayor y menor autovalor de A respectivamente y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autoespacios asociados correspondientes. Entonces, por el Teorema de Rayleigh,

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3$$

y $Q(x) = \lambda_m \|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ y $Q(x) = \lambda_M \|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$. Entonces, es inmediato ver que

$$4\lambda_m \leq Q(x) \leq 4\lambda_M \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2$$

y $Q(x) = 4\lambda_m$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ y $\|x\| = 2$ y $Q(x) = 4\lambda_M$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\|x\| = 2$. Por lo tanto,

$$\min_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_m = 4(-2 + r) \quad \text{y} \quad \max_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_M = 4(1 + r).$$

Si

$$Q(x) = x^T A x = x^T (B + rI) x \leq 16 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2,$$

entonces 16 es una cota superior del conjunto $\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^3 \text{ con } \|x\| = 2\}$. Entonces, el máximo de dicho conjunto es menor o igual a esa cota superior y por lo tanto,

$$\max_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_M = 4(1+r) \leq 16$$

y entonces, tenemos que $r \leq \frac{16}{4} - 1 = 3$.

De la misma manera, si

$$-2 \leq x^T(B+rI)x = x^T Ax = Q(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2,$$

entonces -2 es una cota inferior del conjunto $\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^3 \text{ con } \|x\| = 2\}$. Entonces, el mínimo de dicho conjunto es mayor o igual a esa cota inferior y por lo tanto,

$$-2 \leq \min_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_m = 4(-2+r)$$

y entonces, tenemos que $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \leq r$. Por lo tanto, $\frac{3}{2} \leq r \leq 3$. □

Optimización de formas cuadráticas con restricciones definidas positivas

En lo que sigue, busacamos maximizar o minimizar una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ donde A es simétrica sujeta a la restricción $R(x) = 1$, donde $R(x) = x^T Bx$ es una forma cuadrática con B simétrica y **definida positiva**.

Queremos resolver

$$\max_{R(x)=1} Q(x) \quad \text{y} \quad \min_{R(x)=1} Q(x).$$

Si $R(x) = x^T x = \|x\|^2$, entonces estamos en los casos que ya analizamos y que sabemos resolver usando el Teorema de Rayleigh. La idea entonces es, a partir de algún cambio de variables conveniente, transformar la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$ y luego usar lo que ya sabemos en las nuevas variables.

Para aplicar la idea anterior B debe ser necesariamente **definida positiva**. De hecho, supongamos que existe una matriz inversible $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que con el cambio de variables $z = Fx$, transformamos la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$. Entonces, por un lado $x = F^{-1}z$ y por el otro lado,

$$R(x) = x^T Bx = z^T (F^{-1})^T B F^{-1} z.$$

Si queremos que $z^T (F^{-1})^T B F^{-1} z = z^T z$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$z^T ((F^{-1})^T B F^{-1} - I) z = z^T (F^{-1})^T B F^{-1} z - z^T z = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, eso implica (meditar por qué) que

$$(F^{-1})^T B F^{-1} = I.$$

Si ahora multiplicamos la ecuación anterior a izquierda por F^T y a derecha por F , recordando que $(F^{-1})^T = (F^T)^{-1}$, tenemos que

$$B = F^T[(F^{-1})^T B F^{-1}]F = F^T I F = F^T F.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\langle Bx, x \rangle = \langle F^T Fx, x \rangle = \langle Fx, Fx \rangle = \|Fx\|^2 \geq 0,$$

y entonces B tiene que ser semidefinida positiva. Y además, como queremos que F sea inversible, tenemos que $\text{nul}(F) = \{0\}$. Entonces,

$$\langle Bx, x \rangle = 0 = \|Fx\|^2$$

si y sólo si $Fx = 0$ si y sólo si $x \in \text{nul}(F) = \{0\}$. Por lo tanto, B tiene que ser necesariamente **definida positiva**. Si B no cumple esa condición, no tendremos esperanzas de encontrar un cambio de variables que transforme la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$.

Ahora sí, supongamos que $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva. Entonces, B es simétrica, sus autovalores son todos positivos y existe $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, tal que $B = QDQ^T$, donde $D =$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$$

es la matriz con todos los autovalores positivos de B .
Sea

$$F := Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T.$$

Entonces, esa es una diagonalización ortogonal de F por cómo la definimos. Es más, por definición, los autovalores de F son la raíz cuadrada de los autovalores de B . Por lo tanto, F es simétrica y tiene todos autovalores positivos (no nulos). Es decir, F es inversible y definida positiva y además

$$F^2 = FF = FF^T = F^T F = Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T = QDQ^T = B.$$

La matriz F es un buen candidato para el cambio de variables que buscamos. Entonces, hagamos el cambio de variables $z = Fx$, ($x = F^{-1}z$). Entonces, como $B = F^2 = F^T F = FF^T$, tenemos que

$$R(x) = x^T Bx = x^T F^T Fx = (Fx)^T (Fx) = z^T z \quad y$$

$$Q(x) = x^T Ax = (F^{-1}z)^T A(F^{-1}z) = z^T (F^{-1})^T A F^{-1} z = z^T (F^{-1} A F^{-1}) z.$$

Entonces, usando el Teorema de Rayleigh, tenemos que

$$\max_{R(x)=1} Q(x) = \max_{z^T z=1} z^T (F^{-1} A F^{-1}) z = \lambda_M(F^{-1} A F^{-1}),$$

donde $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ es el autovalor máximo de la matriz simétrica $F^{-1}AF^{-1}$. Por el mismo teorema, tenemos que el máximo se alcanza en los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$.

De manera análoga, tenemos que

$$\min_{R(x)=1} Q(x) = \min_{z^T z=1} z^T (F^{-1}AF^{-1})z = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1}),$$

donde $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$ es el autovalor mínimo de la matriz simétrica $F^{-1}AF^{-1}$. Por el mismo teorema, tenemos que el mínimo se alcanza en los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$.

Para evitar hacer todas las cuentas que implicaría el cálculo de los autovalores y autoespacios de la matriz $F^{-1}AF^{-1}$, a continuación, veremos una manera simple de hallar $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$, $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$, $\mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$.

Con la notación que usamos arriba, valen las siguientes observaciones:

1. λ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si λ es una raíz de $\det(A - \lambda B)$.
2. Sea λ un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$. Entonces $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_\lambda$ si y sólo si $x \in \text{nul}(A - \lambda B)$.

Probemos estas observaciones.

1. : Recordemos que $B = F^2$, entonces

$$F^{-1}BF^{-1} = F^{-1}FFF^{-1} = I.$$

Por lo tanto,

$$F^{-1}AF^{-1} - \lambda I = F^{-1}AF^{-1} - \lambda F^{-1}BF^{-1} = F^{-1}(A - \lambda B)F^{-1}.$$

Entonces, λ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si

$$0 = \det(F^{-1}AF^{-1} - \lambda I) = \det(F^{-1}(A - \lambda B)F^{-1}) = \det(F) \det(A - \lambda B) \det(F^{-1}) = \det(A - \lambda B)$$

si y sólo si λ es una raíz de $\det(A - \lambda B)$.

2. : Sea λ un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ y supongamos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_\lambda$, entonces $F^{-1}AF^{-1}z = \lambda z$. Por lo tanto, $AF^{-1}z = F(F^{-1}AF^{-1})z = F\lambda z = \lambda Fz$ y

$$(A - \lambda B)x = (A - \lambda B)F^{-1}z = AF^{-1}z - \lambda BF^{-1}z = \lambda Fz - \lambda FFF^{-1}z = \lambda Fz - \lambda Fz = 0,$$

entonces $x \in \text{nul}(A - \lambda B)$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \text{nul}(A - \lambda B)$ entonces $(A - \lambda I)x = 0$, ó equivalentemente, $Ax = \lambda Bx = \lambda Fx$. Entonces

$$F^{-1}Ax = \lambda F^{-1}Fx = \lambda Fx.$$

Sea $z := Fx$, entonces $x = F^{-1}z$ y

$$(F^{-1}AF^{-1})z = F^{-1}Ax = \lambda Fx = \lambda z.$$

Por lo tanto λ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$, $z \in \mathcal{S}_\lambda$ y $x = F^{-1}z$.

Vamos a aplicar estas herramientas en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 11: Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$Q_1(x) = x_1x_2, \quad Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2.$$

a) Hallar $\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\min_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$.

b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan Q_1 .

c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan Q_1 .

Observar que $Q_1(x) = x^T A x$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ y $Q_2(x) = x^T B x$ con $B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

El polinomio característico de B es $p_B(\lambda) = (9 - \lambda)(3 - \lambda) - 16$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 11$ y $\lambda_2 = 1$ (ambas positivas). Por lo tanto, B es definida positiva, entonces la restricción Q_2 es una forma cuadrática definida positiva y podemos aplicar lo que acabamos de ver.

Dem. a) : Vimos que si $B = FF^T$, con $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida positiva, entonces

$$\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \lambda_M(F^{-1}AF^{-1}) \text{ y } \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$$

donde $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ y $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$ son el máximo y mínimo autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ respectivamente. También vimos que λ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si λ es una raíz de $\det(A - \lambda B)$. Busquemos entonces las raíces de

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda B) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -9\lambda & \frac{1}{2} + 4\lambda \\ \frac{1}{2} + 4\lambda & -3\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= 27\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + 4\lambda\right)^2 = 27\lambda^2 - 16\lambda^2 - \frac{1}{4} - 4\lambda = 11\lambda^2 - 4\lambda - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Las raíces de $\det(A - \lambda B)$ son $\lambda_1 = \frac{4+3\sqrt{3}}{22} = \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ y $\lambda_2 = \frac{4-3\sqrt{3}}{22} = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$. Entonces,

$$\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{4+3\sqrt{3}}{22} \text{ y } \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{4-3\sqrt{3}}{22}.$$

b) : Vimos que los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan Q_1 son los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$. También vimos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ si y sólo si $x \in \text{nul}(A - \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})B)$. Calculemos

$$\text{nul}(A - \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})B) = \text{nul}\left(A - \left(\frac{4+3\sqrt{3}}{22}\right)B\right) = \left[\begin{array}{cc} \frac{-36-27\sqrt{3}}{22} & \frac{27+12\sqrt{3}}{22} \\ \frac{27+12\sqrt{3}}{22} & \frac{-12-9\sqrt{3}}{22} \end{array} \right] = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Entonces, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan Q_1 son los x de la

forma $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $Q_2(x) = 1$. Como

$$\begin{aligned} 1 = Q_2(x) &= Q_2(\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 Q_2(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 (\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T B \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} 9 - 4\sqrt{3} \\ -4 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} = \alpha^2 (9 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 9) \\ &= \alpha^2 (18 - 8\sqrt{3}), \end{aligned}$$

tenemos que $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}}$ y el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan

Q_1 , es el conjunto de dos puntos $\{\frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}$.

c) : Vimos que los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan Q_1 son los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$. También vimos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ si y sólo si $x \in \text{nul}(A - \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})B)$. Calculemos

$$\text{nul}(A - \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})B) = \text{nul}(A - (\frac{4-3\sqrt{3}}{22})B) = \left[\begin{array}{cc} \frac{-36+27\sqrt{3}}{22} & \frac{27-12\sqrt{3}}{22} \\ \frac{27-12\sqrt{3}}{22} & \frac{-12+9\sqrt{3}}{22} \end{array} \right] = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Entonces, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan Q_1 son los x de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $Q_2(x) = 1$. Como

$$\begin{aligned} 1 = Q_2(x) &= Q_2(\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 Q_2(\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 (\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T B \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} -9 - 4\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} = \alpha^2 (9 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9) \\ &= \alpha^2 (18 + 8\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}}$ y el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan

Q_1 es el conjunto de dos puntos $\{\frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}$. $\square$

En el próximo ejercicio, vamos a resolver un problema de minimización con una restricción que no es definida positiva. Por lo tanto, no podremos aplicar las herramientas que vimos hasta ahora. Sin embargo, como la función a minimizar es $Q_1(x) = \|x\|^2$ (que veremos es una función relativamente sencilla) podremos resolver el ejercicio geoméricamente.

Ejercicio 12 b): Hallar si existen, el máximo y el mínimo y (los puntos donde se alcanzan) de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción

$$Q_2(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2 = 1.$$

Dem. Observar que $Q_2(x) = x^T B x$, con $B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de B es

$$p_B(\lambda) = (2 - \lambda)(-6 - \lambda) - 6 = \lambda^2 + 4\lambda - 21.$$

Entonces, los autovalores de B son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$. Por lo tanto B es indefinida y NO podemos aplicar la técnica que usamos en el **Ejercicio 11**.

Sin embargo, como la forma cuadrática a optimizar es $Q_1(x) = \|x\|^2$ no todo está perdido. Imaginemos que graficamos en $\mathbb{R}^2$ la restricción $Q_2(x) = 1$ que es el gráfico del conjunto de nivel $c = 1$ para la forma cuadrática indefinida Q_2 (lo aprendimos a hacer al principio de la semana pasada). Si podemos observar cuáles puntos de dicho gráfico se encuentran más cercanos al origen es decir al punto $[0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^2$, entonces es claro que esos puntos van a minimizar la función $\|x\|$, luego (si no se entiende la próxima igualdad demostrarla) tenemos que

$$\left(\min_{Q_2(x)=1} \|x\| \right)^2 = \min_{Q_2(x)=1} \|x\|^2 = \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x).$$

Lo mismo podremos pensar para los puntos más alejados del origen y el máximo que nos interesa.

Entonces, para graficar el conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$, diagonalizemos ortogonalmente a la matriz B . Ya vimos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$ son sus autovalores y los autoespacios asociados son:

$$\text{nul}(B - 3I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\text{nul}(B + 7I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

Entonces, $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ es una bon de $\mathbb{R}^2$ y si tomamos $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, entonces $\det(P) = 1$ y una diagonalización ortogonal de B es

$$B = P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} P^T.$$

Por lo tanto, con el cambio de variables $x = Py$, nos queda $Q(x) = \tilde{Q}(y) = 3y_1^2 - 7y_2^2$. Entonces $Q_2(x) = 1$ si y sólo $3y_1^2 - 7y_2^2 = 1$, ó equivalentemente,

$$\frac{y_1^2}{[\frac{1}{\sqrt{3}}]^2} - \frac{y_2^2}{[\frac{1}{\sqrt{7}}]^2} = 1.$$

Por lo tanto el conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$ es una hipérbola en $\mathbb{R}^2$ en los nuevos ejes y_1, y_2 determinados por los versores $v_1 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ que son las columnas de P y que son una rotación de un ángulo (positivo) de los ejes originales x_1, x_2 . Ver Figura 1.

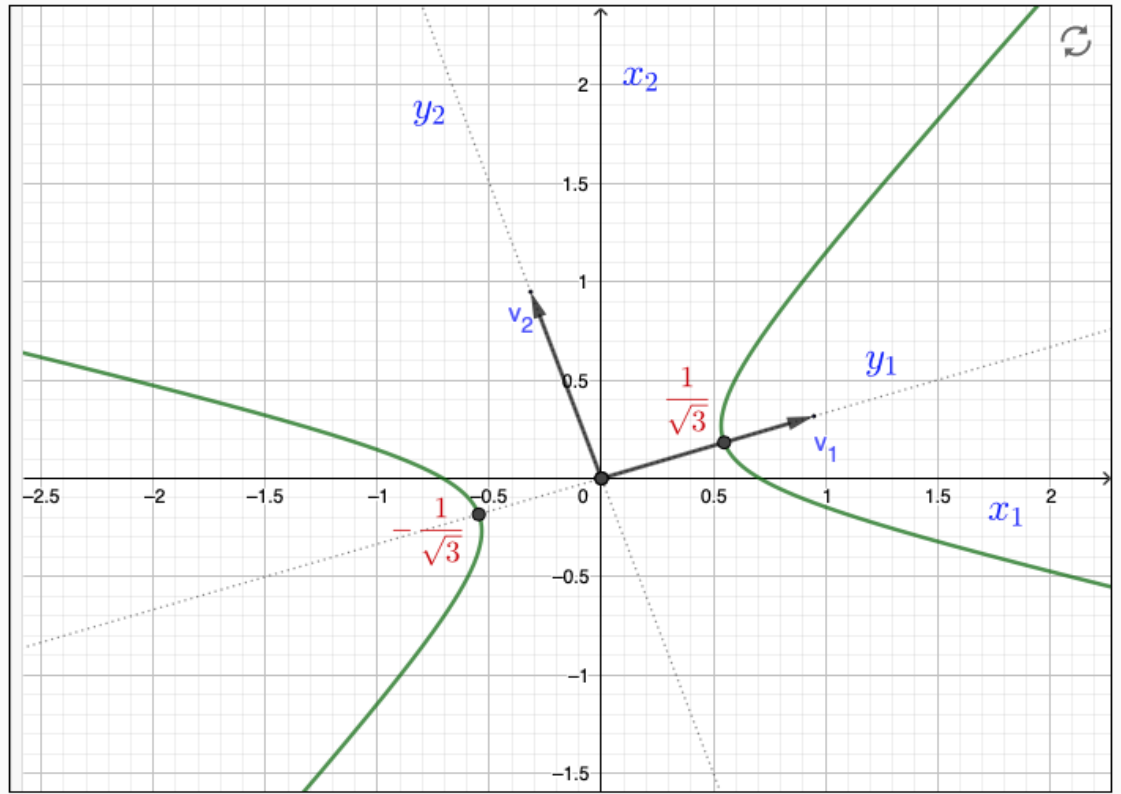


Figura 1: Ejercicio 12b))

Como se puede observar, los puntos del conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$ (que son los puntos de la hipérbola de color verde) más cercanos al origen, son los puntos $y_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y_{m2} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$ (en los ejes y_1, y_2). Por lo tanto, usando el cambio de variables $x = Py$, tenemos que, los puntos más cercanos al origen son

$$x_{m1} = Py_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \text{ y } x_{m2} = Py_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \min_{Q_2(x)=1} \|x\|^2 = \left(\min_{Q_2(x)=1} \|x\| \right)^2 = \|x_m\|^2 = \|y_m\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

y dicho mínimo, como acabamos de ver, se alcanza en los puntos $x_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$ y $x_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$.

Por último, es claro que no existe el máximo de $\|x\|^2$ restringido a $Q_2(x) = 1$. $\square$

Tal como hicimos en el **Ejercicio 12**, podemos determinar gráficamente (si existen) $\min_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y los puntos donde se alcanzan esos extremos, para cualquier forma cuadrática Q_2 (sin importar si es definida positiva) pero cuando Q_1 es una forma cuadrática muy particular, por ejemplo $Q_1(x) = \|x\|^2$ o formas cuadráticas similares.