



## ÁLGEBRA A (INGENIERÍA)

### Práctica 6

#### TRANSFORMACIONES LINEALES

**Ejercicio 1.** Determinar si la función  $T$  es una transformación lineal.

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3, -x_2)$ .
- b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)$ .
- c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0)$ .
- d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_3, 2x_2)$ .
- e)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4)$
- f)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, -2x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

**Ejercicio 2.** En cada caso, hallar la expresión funcional de  $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ .

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ .
- c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .
- f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- g)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 3.** En cada caso, hallar la expresión matricial canónica de  $T$ .

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$ .
- b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$ .
- c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ .
- d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$ .
- e)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_2, x_1 - x_3)$ .

**Ejercicio 4.** Decidir si existe una transformación lineal  $T$  que satisfaga:

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(1, -1) = (3, 0)$  y  $T(2, -2) = (0, -2)$ .  
 b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(1, -2, 0) = (3, 4)$ ,  $T(2, 0, 1) = (-1, 1)$  y  $T(0, 4, 1) = (-7, -7)$ .  
 c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(1, 1, 1) = (2, 3, 4)$ ,  $T(0, 1, 1) = (1, 2, 1)$  y  $T(1, 2, 2) = (1, 1, 5)$ .  
 d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(1, 1) = (2, 1, 1)$ ,  $T(1, 0) = (0, 2, 0)$  y  $T(5, 2) = (4, 8, 2)$ .

**Ejercicio 5.** Hallar las expresiones funcional y matricial de la transformación lineal  $T$ .

- a)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1, 0, 0) = (2, 1, -1)$ ,  $T(0, 1, 0) = (3, -1, 1)$  y  $T(0, 0, 1) = (0, 0, 4)$ .  
 b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(2, 0, 0) = (4, 2, 2)$ ,  $T(0, 4, 0) = (1, 1, 1)$  y  $T(0, 0, 3) = (0, 0, -1)$ .  
 c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1, 1, -1) = (0, 3, 1)$ ,  $T(1, 0, 1) = (2, -1, 1)$  y  $T(1, 1, 0) = (3, 2, 4)$ .  
 d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(1, -1) = (2, 1)$  y  $T(1, 1) = (0, 1)$ .

**Ejercicio 6.** Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ , verifica  $T(1, 1) = (-3, 2)$ .  
 b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ , verifica  $T(1, 2, 1) = (-1, 5, -6)$ .

#### NÚCLEO E IMAGEN

**Ejercicio 7.** En cada caso, hallen una base de la imagen  $T(S)$  del subespacio  $S$  por la transformación lineal  $T$ . Interpretar geoméricamente.

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$  para  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$ .

b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$  para

i)  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$       ii)  $S = \langle (1, 2, 0) \rangle$

**Ejercicio 8.** Hallar la preimagen  $T^{-1}(M)$  del conjunto  $M$  por la transformación lineal  $T$ . Interpretar geoméricamente.

a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (8x_1, 3x_1 - x_2)$ , para

i)  $M = (1, 2)$       ii)  $M = \langle (1, 1) \rangle$

b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ , para

i)  $M = (3, k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$       ii)  $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$

c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)$ , para

i)  $M = (-2, 1, 2)$       ii)  $M = \langle (2, 1, 1) \rangle$

d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ , para

i)  $M = \{(2, -1, 3)\}$       ii)  $M = M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

**Ejercicio 9.** Sean  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$ ,  $w = (2, 3)$ ,  $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$  y  $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$ . Hallar  $T(S)$ ,  $T^{-1}(w)$  y  $T^{-1}(L)$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal con matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcular  $T(1, 0, -2)$  y  $T(0, 0, 1)$ .
- Dar bases de  $Nu(T)$  e  $Im(T)$ .
- Calcular  $T^{-1}(-1, 1, -2)$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que  $T(0, 0, 2) = (1, -2, -1)$ ,  $T(0, 1, -1) = (3, -2, 0)$  y  $T(2, 1, 0) = (1, 2, 2)$ .

- Calcular  $T(0, 2, -1)$ .
- Hallar una base de  $Im(T)$  y una base de  $Nu(T)$ .

**Ejercicio 12.** Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de  $T$ .

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3)$
- $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)$
- $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, -x_2 + x_4, x_4)$

**Ejercicio 13.** Para cada una de las transformaciones lineales  $T$  del ejercicio 3, decidir cuáles son monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

**Ejercicio 14.** En cada caso, definir, si es posible, una transformación lineal que verifique las condiciones enunciadas.

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $Nu(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$ ,  $Im(T) = \langle (1, 0) \rangle$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $Nu(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $(1, 1, 2) \in Nu(T)$ ,  $Im(T) = \langle (1, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $(1, 0, 1) \in Nu(T)$  y  $T$  es epimorfismo
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $Nu(T) = Im(T)$
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $Nu(T) \subset Im(T)$  y  $T(3, 2, 1) = T(-1, 2, 0) = 0$

**Ejercicio 15.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal con matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que  $T$  es isomorfismo.

**Ejercicio 16.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que  $T(1, 1, 1) = (1, 1, 2)$ ,  $T(1, 2, 0) = (-1, 1, 1)$  y  $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1+k)$ . Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $T$  es isomorfismo.

#### INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

**Ejercicio 17.** Hallar la imagen del cuadrado unitario de  $\mathbb{R}^2$  por la transformación lineal  $T$  y calcular su área. Graficar.

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

**Ejercicio 18.** Hallar la imagen del cubo unitario de  $\mathbb{R}^3$  por la transformación lineal  $T$  y calcular su volumen.

- a)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, 5x_3)$   
 b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$

**Ejercicio 19.** Hallar la expresión matricial de

- a) La simetría en  $\mathbb{R}^2$  respecto a  
 i) el eje  $x$       ii) el eje  $y$       iii) la recta  $y = x$       iv) la recta  $y = -x$   
 b) La proyección ortogonal en  $\mathbb{R}^2$  sobre  
 i) el eje  $x$       ii) el eje  $y$   
 c) La simetría en  $\mathbb{R}^3$  respecto al  
 i) el plano  $xy$       ii) el plano  $xz$       iii) el plano  $yz$   
 d) La proyección ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  sobre  
 i) el plano  $xy$       ii) el plano  $xz$       iii) el plano  $yz$

**Ejercicio 20.** Hallar la imagen del vector  $(3, -4)$  cuando se lo hace girar, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con un ángulo de:

- a)  $\frac{\pi}{6}$       b)  $\frac{\pi}{4}$       c)  $\frac{\pi}{2}$       d)  $\pi$

En cada caso, dar la expresión matricial de la rotación correspondiente al ángulo dado.

**Ejercicio 21.** Hallar la expresión matricial de la rotación de ángulo

- a)  $\frac{\pi}{6}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje  $x$ .  
 b)  $\frac{\pi}{4}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje  $y$ .  
 c)  $\frac{\pi}{2}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje  $z$ .

**Ejercicio 22.** Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en  $\mathbb{R}^2$  que produce

- a) un deslizamiento cortante con un factor de  
 i)  $k = 4$  en la dirección  $y$       ii)  $k = -2$  en la dirección  $x$   
 b) una dilatación de factor  
 i)  $k = 2$       ii)  $k = 2$  en la dirección  $x$   
 c) una contracción de factor  
 i)  $k = \frac{1}{2}$       ii)  $k = \frac{1}{2}$  en la dirección  $y$

**Ejercicio 23.** Hallar la imagen del rectángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$  y  $(0, 2)$  bajo

- a) una simetría con respecto a la recta  $y = x$ .  
 b) una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.  
 c) una contracción con factor  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $y$ .  
 d) una dilatación con factor 3 en la dirección  $x$ .  
 e) un deslizamiento cortante con factor 2 en la dirección  $x$ .  
 f) un deslizamiento cortante con factor 1 en la dirección  $y$ .

## COMPOSICIÓN E INVERSA

**Ejercicio 24.** Sean las transformaciones lineales  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_2(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ , y  $T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $A_{T_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Hallar las expresiones matriciales de  $T_1 \circ T_1$ ,  $T_2 \circ T_3$  y  $T_3 \circ T_2$ .

**Ejercicio 25.** Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$  que se indica.

- Una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto a la recta  $y = x$ .
- Una proyección ortogonal sobre el eje  $y$  seguida de una contracción con factor  $k = \frac{1}{2}$ .
- Una simetría con respecto al eje  $x$  seguida de una dilatación con factor  $k = 3$ .
- Una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una proyección ortogonal sobre el eje  $x$ , seguida de una simetría con respecto a la recta  $y = x$ .
- Una dilatación de factor  $k = 2$  seguida de una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  en sentido contrario a las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto al eje  $y$ .
- Una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{12}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una rotación de ángulo  $\frac{7\pi}{12}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj, seguida de una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Ejercicio 26.** Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  que se indica.

- Una simetría con respecto al plano  $yz$  seguida de una proyección ortogonal sobre el plano  $xz$ .
- Una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto del eje  $y$  seguida de una dilatación de factor  $k = \sqrt{2}$ .
- Una proyección ortogonal sobre el plano  $xy$  seguida de una simetría con respecto al plano  $yz$ .
- Una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{6}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje  $x$  seguida de una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{6}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje  $z$  seguida de una contracción con factor  $k = \frac{1}{4}$ .
- Una simetría con respecto al plano  $xy$  seguida de una simetría con respecto al plano  $xz$  seguida de una proyección ortogonal sobre el plano  $yz$ .
- Una rotación de ángulo  $\frac{3\pi}{2}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje  $x$  seguida de una rotación de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje  $y$ , seguida de una rotación de ángulo  $\pi$  en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje  $z$ .

**Ejercicio 27.** Hallar la función inversa del isomorfismo  $T$ .

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1, 1, -1) = (1, -1, 1)$ ,  $T(2, 0, 1) = (1, 1, 0)$  y  $T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$ .
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$