



## ÁLGEBRA A (INGENIERÍA)

### Práctica 7

#### NÚMEROS COMPLEJOS

**Ejercicio 1.** Dar la forma binómica de  $z$  en los casos

a)  $z = 1 - i(2 + i)$

b)  $z = (1 + 2i)(3 - i)^2$

c)  $z = (3 + 4i)^{-1}$

**Ejercicio 2.** Hallar todos los números complejos  $z$  que satisfacen

a)  $(1 + i)z + 5 = 2 - 3i$

b)  $i(z - 5) = (1 + 3i)z$

c)  $\frac{z - i}{z} = 2 + i$

d)  $\frac{2 + i}{z} = \frac{2 + 2i}{z + 1}$

**Ejercicio 3.** Dar la forma binómica de todos los números complejos  $z$  que satisfacen

a)  $\bar{z}(z + 1) = 11 + 3i$

b)  $Re(z)\bar{z} = 4 + 6i$

c)  $Im(z)z + iRe(z)\bar{z} = 2Re(z)Im(z)$

**Ejercicio 4.** Dados  $z = 1 + 3i$  y  $w = 4 + 2i$ , representar en el plano, sin calcularlos, los números complejos  $z$ ,  $-z$ ,  $2z$ ,  $-3w$ ,  $-w$ ,  $z + w$ ,  $w - z$  y  $z - 3w$ .

**Ejercicio 5.** Calcular  $|z|$  en los casos

a)  $z = i(4 - 3i)$

b)  $z = (1 + i)^8$

c)  $z = \sqrt{5}(1 + 2i)^{-1}(1 + i)$

d)  $z = 1 - i(2 + i)$

e)  $z = (-7i)|(1 - i)^{-1}|$

f)  $z = \sqrt{2}(-1 + i)^{-1}(3 + i)^8$

**Ejercicio 6.** Representar en el plano complejo

a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$

c)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = 2\}$

d)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 2\}$

e)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq 2\}$

- f)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\}$   
 g)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$   
 h)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 2\operatorname{Re}(z) + 1 \text{ y } |z| < 1\}$

**Ejercicio 7.** Representar en el plano complejo

- a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + i|\}$   
 b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| \leq 2 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1\}$   
 c)  $\{z \in \mathbb{C} : |3z - 3| \geq 6 \text{ y } |z| \leq |z - 1 - i|\}$

**Ejercicio 8.** Consideren el cuadrado en el plano complejo cuyos vértices son  $2 + 2i$ ,  $-2 + 2i$ ,  $-2 - 2i$  y  $2 - 2i$ . Noten que sus lados son paralelos a los ejes y que las diagonales del cuadrado se cortan en  $z = 0$ . Hallen:

- (i) Los cuatro vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes, del mismo tamaño que el dado, pero cuyas diagonales se corten en  $z = 3 + 5i$ .  
 (ii) Los cuatro vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes, cuyas diagonales aún se cortan en  $z = 0$ , pero cuyo perímetro sea 8 veces más grande que el perímetro del cuadrado original.  
 (iii) Los cuatro vértices de un cuadrado inclinado  $45^\circ$  hacia la derecha, y que cuyas diagonales se corten en  $z = 1 + i$ .

**Ejercicio 9.** Escribir en forma binómica todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que

- a)  $z^2 = 3 + 4i$   
 b)  $z^2 = -8i$   
 c)  $z^2 - 2z + 5 = 0$   
 d)  $z(z + 1) = 5 + 5i$

**Ejercicio 10.** Sin calcular  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$ , representar en el plano complejo

- a)  $z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$   
 b)  $z = 3(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$   
 c)  $z = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi$   
 d)  $z = 5(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$

**Ejercicio 11.** Hallar el módulo y el argumento de  $z$  y expresar a  $z$  con la notación exponencial en los casos

- a)  $z = \sqrt{7}$   
 b)  $z = -2$   
 c)  $z = -6i$   
 d)  $z = 2 + 2i$   
 e)  $z = \sqrt{3} + i$   
 f)  $z = -1 - \sqrt{3}i$   
 g)  $z = -3(\cos \frac{17}{5}\pi + i \sin \frac{17}{5}\pi)$   
 h)  $z = \cos \frac{7}{4}\pi - i \sin \frac{7}{4}\pi$   
 i)  $z = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$   
 j)  $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ .

**Ejercicio 12.** Representar en el plano complejo

- a)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 4 \text{ y } \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$   
 b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3 \text{ y } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$   
 c)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z) \text{ y } \pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi\}$ .

**Ejercicio 13.** Hallar la forma polar de  $z$  en los casos

- a)  $z = (1 + i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
- b)  $z = (-3i)(-1 + i)\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$
- c)  $z = (-1 + \sqrt{3}i)^8(2 + 2i)^{-1}$
- d)  $z = \left(\sin \frac{2\pi}{7} - i \cos \frac{2\pi}{7}\right)^5$

**Ejercicio 14.** Hallar la forma binómica de  $z$  en los casos

- a)  $z = (-\sqrt{3} + i)^{16}(1 - i)$
- b)  $z = \left(\frac{-2i}{(1 + \sqrt{3}i)}\right)^{11}$
- c)  $z = \frac{(\sqrt{3} + i)^{23}}{(-1 - i)^{31}}$
- d)  $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{15}$

**Ejercicio 15.** Hallar las raíces  $n$ -ésimas de  $w$  y expresarlas con la notación exponencial en los casos

- a)  $n = 3, n = 4$  y  $n = 6, w = 1$
- b)  $n = 6, w = -1$
- c)  $n = 4, w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- d)  $n = 5, w = i$
- e)  $n = 3, w = 5 - 5i$
- f)  $n = 4, w = -8 + 8\sqrt{3}i$

**Ejercicio 16.** Determinar todos los  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen

- a)  $z^6 = -1$
- b)  $z^3 = i\bar{z}^2$
- c)  $z^8 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$
- d)  $z^4 = -\bar{z}^4$
- e)  $z^3 + 4i|z| = 0$
- f)  $z^6 = (1 + 2i)^6$