

"... Mama, la libertad siempre la llevaras  
 Dentro del corazón  
 Te pueden corromper, te puedes olvidar  
 Pero ella siempre está..."  
 Charly García

Reunión 10 de agosto de 2020. Curso 1.

Algunos comentarios más sobre DVS e introducción a formas cuadráticas.

Recordemos que trabajamos siempre con  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  o  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y consideramos el P.I canónico en  $\mathbb{C}^n$  ( $\langle x, y \rangle = \bar{y}^T x$ ) o  $\mathbb{R}^n$ , ( $\langle x, y \rangle = y^T x$ ).

Supongamos  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  es una transformación lineal y que  $A = [T]_E^{E'} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , con  $E$  y  $E'$  las bases canónicas de  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$  respectivamente.

Por el teorema de Descomposición en Valores Singulares, sabemos que existen matrices unitarias  $V$  y  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$  respectivamente tales que :

$$A = U \Sigma \bar{V}^T, \Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} D_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \text{ con } D_k = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \text{ y } \sigma_i > 0 \text{ v.s. no nulos de } A.$$

Entonces:

1. Si  $B'$  es la base de  $\mathbb{C}^m$  formada por las columnas de  $U$ ,  $M_{B'}^{E'} = U$
2. Si  $B$  es la base de  $\mathbb{C}^n$  formada por las columnas de  $V$ ,  $M_B^E = V$  y  $M_E^B = (M_B^E)^{-1} = \bar{V}^T$ .
3. Entonces  $\Sigma = [T]_B^{B'}$  donde  $B$  y  $B'$  son bases ortonormales de  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$  respectivamente.  
Pues

$$A = [T]_E^{E'} = U \Sigma \bar{V}^T = M_{B'}^{E'} [T]_B^{B'} M_E^B$$

Ejemplo:

Consideramos la transformación lineal,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida como  $T(X) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ .

Nos piden encontrar bases **ortonormales** de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ,  $B$  y  $B'$  tal que  $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Resolución:

De las cuentas que ya hicimos la semana pasada obtuvimos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } M_{B'}^{E'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow B' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Si } M_E^B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M_B^E = (M_E^B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo que } B = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces:

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$


---

Otra aplicación de la Descomposición en Valores Singulares es “medir” cuánto deforma la longitud de los vectores el multiplicar por la matriz  $A$ .

Ejemplo:

Otra vez tomemos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  y supongamos que queremos saber cómo se transforma la circunferencia unitaria de  $\mathbb{R}^2$  cuando sus vectores son multiplicados por  $A$ .

Tomemos la base formada por los autovectores de  $A^T A$ .

Consideramos en conjunto  $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|^2 = 1\}$

$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , con  $A^T A v_1 = 25v_1$ ,  
 $A^T A v_2 = 9v_2$ .

Si  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x = \alpha v_1 + \beta v_2$ , si además  $\|x\|^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 \|v_1\|^2 + \beta^2 \|v_2\|^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Si  $x \in C_1 \Rightarrow \|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T Ax = (\alpha v_1^T + \beta v_2^T) A^T A(\alpha v_1 + \beta v_2)$ .

$$\|Ax\|^2 = \alpha^2 v_1^T A^T A v_1 + \beta^2 v_2^T A^T A v_2 = \alpha^2 v_1^T 25 v_1 + \beta^2 v_2^T 9 v_2$$

Como  $v_1^T v_1 = 1$  y  $v_2^T v_2 = 1$

$$\|Ax\|^2 = 25\alpha^2 + 9\beta^2 \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Entonces si busco máximo de  $25\alpha^2 + 9\beta^2$ , con  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

$$25\alpha^2 + 9\beta^2 \leq 25\alpha^2 + 25\beta^2 = 25(\alpha^2 + \beta^2) = 25$$

$$\text{máx}(\|Ax\|) = 5 \text{ con } \|x\| = 1$$

El máximo se alcanza en  $\pm v_1$  pues  $\|Av_1\|^2 = v_1^T A^T A v_1 = 25 \Rightarrow \|Av_1\| = 5$

$$25\alpha^2 + 9\beta^2 \geq 9\alpha^2 + 9\beta^2 = 9(\alpha^2 + \beta^2) = 9$$

$$\text{mín}(\|Ax\|) = 3 \text{ con } \|x\| = 1$$

El mínimo se alcanza en  $\pm v_2$  pues  $\|Av_2\|^2 = v_2^T A^T A v_2 = 9 \Rightarrow \|Av_2\| = 3$

Además de la descomposición DVS de  $A$ , sabemos que:

$$Av_1 = \sigma_1 u_1 = \sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A(\pm v_1) = \pm 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$Av_2 = \sigma_2 u_2 = \sigma_2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A(\pm v_2) = \pm 3 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Entonces la circunferencia de radio 1 se transformará en una elipse con vértices  $u_1$  y  $u_2$  en el plano generado por  $u_1$  y  $u_2$ .

$$\text{Con los vértices dados por } \pm 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \pm 3 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

## Formas cuadráticas

### Definición

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $Q(x) = x^T Ax$ .

Ejemplo:

1. Si  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ , queda definida  $Q(x) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

$$Q \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = [3x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 5x_2] [x_1 \ x_2]$$

$$Q \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = (3x_1 + 2x_2)x_1 + (2x_1 + 5x_2)x_2 = 3x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

Observemos que  $a_{11} = 3$ ,  $a_{22} = 5$  y  $2a_{12} = 2a_{21} = 4$

$$Q \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

2. Si  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $Q(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_2x_3$ .

Inmediatamente podemos reconstruir la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que la define:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } Q \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

### Definición

Si:  $Q(x) = x^T Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  simétrica,  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama **Curva de nivel  $k$**  al conjunto  $C_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = k\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Si:  $Q(x) = x^T Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  simétrica,  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama **Superficie de nivel  $k$**  al conjunto  $S_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = k\} \subset \mathbb{R}^3$ .

Es mucho más sencillo graficar este tipo de conjuntos cuando en la fórmula de la forma cuadrática no aparecen productos cruzados.

Cambio de variables para eliminar los productos cruzados:

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica, sabemos que  $A$  es diagonalizable ortogonalmente.

Existe una matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $A = PDP^T$ , con  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  con  $\lambda_i$  autovalor de  $A \forall i = 1, \dots, n$ .

$$\text{Si } Q(x) = x^T A x = x^T P D P^T x = (x^T P) D (P^T x) = (P^T x)^T D (P^T x).$$

Si hacemos el cambio de variables  $y = P^T x$ , obtenemos:

$$x^T A x = (x^T P) D (P^T x) = y^t D y$$

$$\text{Entonces si } x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$$y^t D y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$\text{Entonces } x^t A x = k \iff \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = k \text{ con } y = P^T x.$$