Ejercicios del tipo guìa 5:

5.7 y 5.15

Hallar $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ *simétrica tal que :*

$$\sigma(A) = \{-2, 1\} \;\; y \;\; Nul(A + 2I) = gen\left\{[1 \;\; 0 \; -1]^T\right\}$$

Resolución :

A es simétrica por lo tanto es diagonalizable ortogonalmente.

Tiene sólo dos autovalores, por lo tanto alguno de los dos tiene que tener multiplicidad algebraica = multip. geométrica = 2

$$Nul(A + 2I) = Nul(A - (-2)I) = Nul((-2)I - A) = S_{\lambda=-2}$$

$$Entonces\ dim\left(S_{\lambda=-2}\right) = 1 \Rightarrow mult.\ algeb._{\lambda=-2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow multip.algeb._{\lambda=1} = 2 = multip.\ geométrica.$$

Si A es simétrica a autovalores distintos corresponden autovectores ortogonales.

$$Por\ lo\ tanto\ S_{\lambda=1} = \left(gen\left\{[1 \;\; 0 \; -1]^T\right\}\right)^{\perp}$$

$$S_{\lambda=1} = gen\left\{[1 \;\; 0 \;\; 1]^T, [0 \;\; 1 \;\; 0]^T\right\}.$$

Entonces ya podemos encontrar A :

$$Si\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; y \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A = Q\,D\,Q^{-1}$$

¿Es única? Sí porque los autovalores y sus respectivos autoespacios son únicos.

Hallar $A \in \mathbb{R}^{3x2}$ *tal que* $max_{\|x\|=1}(\|Ax\|) = 3,\ min_{\|x\|=1}(\|Ax\|) = 1\ y\ [1\ 2\ -2]A = [0\ 0]$.

Por desigualdad de Rayleigh: $max_{\|x\|=1}(\|Ax\|) = \sigma_{MAX} = 3\ y\ min_{\|x\|=1}(\|Ax\|) = \sigma_{min} = 1$.

Además como $A \in \mathbb{R}^{3x2}$*, su rango como máximo es 2 y tiene dos valores singulares no nulos* $\Rightarrow rg(A) = 2$

$$Si\ [1\ 2\ -2]A = [0\ 0] \Rightarrow [1\ 2\ -2] \in [Col(A)]^{\perp}$$

ahora ¿cómo seguimos?

Puedo encontrar Col(A) : $x \in Col(A) \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

$A = U_2\, D_2\, V_2^T$ *es DVS reducida de A*

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$col(A) = gen\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = gen\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

U_2 *columnas que forman una bon de Col(A)*

D_2 *tiene a los valores sing. de A no nulos ordenados de mayor a menor*

V_2^T *BON de fil(A) donde cada fila señala el autovector de* $A^T A$ *asociado al respectivo valor singular de A.*

Como $rg(A) = 2$ *,* $Fil(A) \subset \mathbb{R}^2$ *y* $dim(Fil(A)) = 2 \Rightarrow Fil(A) = \mathbb{R}^2$.

No tengo datos que definan quién es V_2.

$$Elijo\ V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ podría\ poner\ V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\ y\ hay\ infinitas\ más.$$

$$Puedo\ plantear\ una\ DVS\ reducida\ de\ A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

A no es única obviamente porque existen infinitas matrices U_2 *y* V_2

Con respecto al ejercicio 12 : Supongamos $R(x) = x^T B x$ *y me piden encontrar* $máx_{R(x)=1}\left(\|x\|^2\right)$ *y* $min_{R(x)=1}\left(\|x\|^2\right)$.

O sea quiero encontrar los puntos sobre la curva o superficie $R(x) = 1$ *más cercanos y más lejanos del origen.*

Por la desigualdad de Rayleigh :

$\lambda_{min}\|x\|^2 \le R(x) \le \lambda_{MAX}\|x\|^2$ *si ahora la restricción es* $R(x) = 1$*, reemplazamos :*

$$\lambda_{min}\|x\|^2 \le 1 \le \lambda_{MAX}\|x\|^2$$

Ahora entonces, del lado derecho de la desigualdad , si $\lambda_{MAX} > 0$:

$$\frac{1}{\lambda_{MAX}} \le \|x\|^2 \ y\ si\ \lambda_{min} > 0 \Rightarrow \|x\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{min}}$$

$$mín_{R(x)=1}\left(\|x\|^2\right) = \frac{1}{\lambda_{MAX}}\ y\ se\ alcanza\ en\ x \in S_{\lambda=\lambda_{MAX}} \cap \left\{x : \|x\|^2 = \frac{1}{\lambda_{MAX}}\right\}$$

$$máx_{R(x)=1}\left(\|x\|^2\right) = \frac{1}{\lambda_{min}}\ y\ se\ alcanza\ en\ x \in S_{\lambda=\lambda_{min}} \cap \left\{x : \|x\|^2 = \frac{1}{\lambda_{min}}\right\}.$$

Entonces, si $R(x)$ *es definida positiva el problema tiene siempre solución.*

¿Si $R(x)$ *es indefinida ?*

Cambio de variables en curvas de nivel o superficies de nivel :

$$Empecemos\ por\ Q(x) = x^T A\, x = c,\ con\ x \in \mathbb{R}^2$$

Si no hay productos cruzados sabemos que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ELIPSE$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad HIPÉRBOLA$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad Dos\ rectas\ paralelas$$

EJEMPLO :

$$Si\ Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Queremos\ graficar:\ Q(x) = 1$$

Buscamos autovalores y autovectores :

$$\lambda = 4\ y\ \lambda = 6$$

$$S_{\lambda=4} = gen\left\{[1\ 1]^T\right\},\ S_{\lambda=6} = gen\left\{[-1\ \ 1]^T\right\}$$

Sin productos cruzados esto queda :

$$Y = P^T x,\ donde\ P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4y_1^2 + 6y_2^2 = 1 \quad (Elipse)$$

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{6}\right)} = 1$$

$$Si\ Restricción:\ Q_2(x) = x^T B\, x = x^T P\, D\, P^T x$$

$$Y\ buscamos\ máx_{Q_2(x)=1}\left(Q_1(x)\right)\ y\ min_{Q_2(x)=1}\left(Q_1(x)\right)$$

$$y = P^T x \Rightarrow Q'_2 = y^T D\, y \qquad (a)$$

Si B es definida positiva, podemos operar como sigue :

como todos los autovalores de B son positivos, los coeficientes de D son positivos.

Existe $D' \,/\, D'^2 = D$*. Entonces podemos reescribir* (a).

$y^T\ D'\ D'\ y$*;* D' *es la matriz diagonal cuyos coef. son las raíces cuadradas de los autovalores de B.*

$$Q'_2 = y^T D'\, D'^T y \ ;\ sea\ z = D'^T y \ \ Q''_2 = z^T z = 1$$

$$y = D^{-1}z,\ x = Py$$

$$Q_1(x) = x^T A x = y^T P^T A\, P y = z^T D^{-1}\ P^T A\, P\, D^{-1} z$$

Busco máximo y mínimo de $Q''_1(z)$*, con la restricción* $\|z\|^2 = 1$

OJO QUE P ES LA ORTOGONAL QUE DIAGONALIZA a B.

Llamen H a la que diagonaliza $A' = D^{-1}\ P^T A\, P\, D^{-1}$ *(Esta matriz es simétrica) .*

Ahora nos queda el problema estadar en la nueva variable z :

$$Encontrar\ máx_{z^T z=1}\left(z^t A' z\right)\ y\ min_{z^T z=1}\left(z^t A' z\right)$$

Una vez resuelto, volvemos a la variable x.