

“... No es porque sea bueno  
 Tampoco soy tan malo.  
 Pero yo sé que  
 La sal no sala  
 Y el azúcar no endulza...”  
 Charly García

Reunión 27 de julio 2020. Curso 1.  
 Matrices ortogonales, unitarias.

En todo lo que sigue vamos a trabajar con el producto interno canónico en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  o  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

### Definiciones

Matriz unitaria: Se dice que una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es **unitaria** si  $U^{-1} = \bar{U}^T = U^* \iff U\bar{U}^T = I_n$

Matriz ortogonal: Se dice que una matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **ortogonal** si  $P^{-1} = P^T \iff PP^T = I_n$

Matriz Hermítica: Se dice que una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es **hermítica** si  $A = \bar{A}^T = A^*$

Matriz simétrica: Se dice que una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **simétrica** si  $A = A^T$

### Ejemplos:

1.  $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ . U es unitaria pues:

$$U\bar{U}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  es ortogonal pues :

$$PP^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

1. Las matrices ortogonales son matrices unitarias con coeficientes reales. Por lo tanto, toda propiedad válida para matrices unitarias es válida para matrices ortogonales en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

2.  $U$  es unitaria  $\iff$  sus columnas forman una BON de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .  $U = [u_1 | u_2 | \dots | u_n]$ ,  $U$  es

$$\text{unitaria} \iff U\bar{U}^T = I_n \iff \bar{U}^T U = I_n \iff \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \\ \bar{u}_2^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{bmatrix} [u_1 | u_2 | \dots | u_n] = I_n \iff$$

$$\bar{u}_1^T u_1 = 1, \bar{u}_1^T u_2 = 0, \dots, \bar{u}_1^T u_n = 0, \text{ o sea } \langle u_j, u_1 \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{En general: } \langle u_j, u_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \iff \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ es una BON de } \mathbb{C}^{n \times n}$$

3.  $U$  es unitaria  $\iff$  sus filas forman una BON de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

4.  $U$  es unitaria  $\implies \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Se suele decir que  $U$  "conserva" el P.I.

Por lo tanto:  $\|Ux\| = \|x\| \forall x \in \mathbb{C}^n$ . Si  $P$  es ortogonal  $\alpha(Px, Py) = \alpha(x, y)$ .

5. Si  $\lambda$  es autovalor de  $U$  unitaria  $\implies |\lambda| = 1$ .

6. Si  $U$  unitaria  $\implies |\det(U)| = 1$ .

En  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , las matrices ortogonales, conservan el P.I. y por lo tanto, la norma y los ángulos. ¿Qué hacen? son, en definitiva las matrices de las rotaciones y las reflexiones. Más aún, muchas veces se define que una matriz de **rotación**, es una matriz ortogonal,  $P$ , tal que  $\det(P) = 1$  y una matriz de reflexión es una matriz ortogonal,  $P$ , tal que  $\det(P) = -1$ .

Un ejemplo introductorio.

1. Si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  (simétrica).

Calculemos sus autovalores y autovectores.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 \\ -3 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 9 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 9 \iff |\lambda - 2| = 3 \iff \lambda = 5 \text{ o } \lambda = -1.$$

Busquemos los autoespacios:

$$S_{\lambda=5} = \text{Nul}(5I - A) :$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{Nul}((-1)I - A) :$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Los autovectores correspondientes a autovalores distintos, no sólo son l.i. sino que son ortogonales.

Por lo tanto  $A$  no sólo es diagonalizable, sino que es ortogonalmente diagonalizable.

Puedo construir  $P$  una matriz formada por los autovectores de  $A$ , ortogonal.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^T.$$

- 
2. Si  $U$  es unitaria y  $D$  diagonal, si suponemos  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = UD\bar{U}^T \Rightarrow \bar{A}^T = \overline{(UD\bar{U}^T)^T} = U\bar{D}^T\bar{U}^T = U\bar{D}\bar{U}^T \Rightarrow AA^* = UD\bar{U}^T U\bar{D}\bar{U}^T = U\bar{D}\bar{D}\bar{U}^T$ .  
 $A^*A = U\bar{D}\bar{U}^T UD\bar{U}^T = U\bar{D}D\bar{U}^T = AA^*$

---

**Matriz Normal:** Se dice que una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es **normal** si  $AA^* = A^*A$ . Las matrices normales son semejantes unitariamente a una matriz diagonal en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

Vamos a estudiar en esta práctica que :

$A$  simétrica si y sólo si  $A = PDP^T$  con  $D$  diagonal en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P$  matriz ortogonal.

$A$  hermítica si y sólo si  $A = UD\bar{U}^T$  con  $D$  diagonal en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  y  $U$  matriz unitaria.

O sea, las matrices hermíticas tienen autovalores reales.

Toda matriz simétrica es una matriz hermítica con coeficientes reales.

---