"Apagá el televisor.
Si lo que te gusta es gritar,
Desenchufa el cable del parlante.
El silencio tiene acción
El mas cuerdo es el más delirante..."
Charly García

Reunión 22 de julio 2020. Curso 1.
Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas

Vamos a resolver ahora ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Ecuaciones de la forma: $X' = AX + F(t)$.

Donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$.

Ejemplos:

1. $X' = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-1 \\ t^2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $X' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^t \end{bmatrix}$

Estrategia de Resolución.

Empecemos, como siempre, por el caso más sencillo. Por ejemplo, un caso en el que la matriz del sistema sea una matriz diagonal.

Por ejemplo:

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^t \\ t^2-1 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Ese sistema matricial es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + e^{2t} \\ x_2' &= x_2 + 3e^{2t} \\ x_3' &= 3x_3 + t^2 \end{cases}$$

Que es un sistema sencillo, pues es un sistema desacoplado.
Entonces se trata de resolver tres ecuaciones de primer orden no homogéneas.

La primera ecuación, $x_1' = 2x_1 + e^{2t}$, tiene como soluciones del homogéneo a las funciones de la forma $x_{1H} = k_1 e^{2t}$ y si, como solución particular proponemos

$x_{1P} = C\ t\ e^{2t} \Rightarrow Ce^{2t} + Ct2e^{2t} = 2Cte^{2t} + e^{2t} \Rightarrow C = 1.$

$x_1 = k_1 e^{2t} + te^{2t}.$

Para la segunda ecuación $x_2' = x_2 + e^{2t}$, obtenemos que $x_2 = k_2 e^t + 3e^{2t}$.

Para la tercera ecuación $x_3' = 3x_3 + t^2 - 1$, obtenemos que $x_3 = k_3 e^{3t} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{7}{27}$.

Entonces la solución general del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{2t} + te^{2t} \\ k_2 e^t + 3e^{2t} \\ k_3 e^{3t} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{7}{27} \end{bmatrix} = \underbrace{k_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Sol. Homogéneo.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} te^{2t} \\ 3e^{2t} \\ -\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{7}{27} \end{bmatrix}}_{\text{Sol. Part.}}$$

Entonces, en el caso general, si tenemos la ecuación:

$X' = AX + F(t)$, con A diagonalizable, tendremos que $A = Q\ D\ Q^{-1}$.

$X' = Q\ D\ Q^{-1} X + F(t)\ \Rightarrow Q^{-1}\ X' = D\ Q^{-1} X + Q^{-1}\ F(t).$

Haciendo el cambio de variables $Y = Q^{-1}X$, queda:
$Y' = D\ Y + Q^{-1}\ F(t)$. Y estamos en un caso similar al anterior.

Si la matriz no es diagonalizable, entonces buscaremos la matriz de Jordan que le corresponde y solucionaremos ese caso que será más simple.

La solución general siempre podrá escribirse como la suma de la solución general del sistema homogéneo con un vector de funciones, solución particular del sistema.

Ejemplo 1:

$$X' = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-1 \\ t^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Buscamos los autovalores y autovectores de $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

$$P_A(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} (\lambda-5) & 2 & -2 \\ -2 & (\lambda-1) & -4 \\ -1 & 1 & (\lambda-6) \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} (\lambda-5) & 2 & -2 \\ -2 & (\lambda-1) & -4 \\ -1 & 1 & (\lambda-6) \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2'=C_1+C_2}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda-5) & (\lambda-3) & -2 \\ -2 & (\lambda-3) & -4 \\ -1 & 0 & (\lambda-6) \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5).$$

El conjunto de autovalores de A que se denomina el **espectro de A**, es $\sigma(A) = \{3,\ 4,\ 5\}$. Los autoespacios son:

$$S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=4} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=3} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Si construimos $Q = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = Q\ D\ Q^{-1}$.

Donde $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Entonces $X' = AX + F(t) \Rightarrow X' = Q\ D\ Q^{-1}X + F(t) \Rightarrow Q^{-1}X' = D\ Q^{-1}X + Q^{-1}F(t)$

Si $Y = Q^{-1}X \Rightarrow Y' = DY + G(t)$, con $G(t) = Q^{-1}F(t)$.

$$G(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t-1 \\ t^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2+t+1 \\ t^2-t \\ 2t^2-t-1 \end{bmatrix}$$

Entonces ahora tenemos que encontrar una solución particular, Y_p, para el sistema que corresponde a las nuevas variables:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t^2+t+1 \\ t^2-t \\ 2t^2-t-1 \end{bmatrix}.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$Y_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}t^2 - \frac{3}{25}t - \frac{28}{125} \\ \\ -\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{3}{32} \\ \\ -\frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{8}{27} \end{bmatrix}.$$

Una vez hallada la solución particular, Y_p , en las nuevas variables encontramos la solución particular para las variables originales.

Si $Y = Q^{-1}X \Rightarrow X = QY \Rightarrow X_p = QY_p$.

La solución general, será de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{4t} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_p$$