Trabajo Práctico 16
Formas Cuadráticas

1. Sea $Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   a) Hallar una fórmula explícita para $Q(x,y)$

   b) Comparar en $Q(x,y)$ el coeficiente de x^2 con la coordenada a_{11} de la matriz A. ¿Qué relación encuentra?

   c) Comparar en $Q(x,y)$ el coeficiente de y^2 con la coordenada a_{22} de la matriz A. ¿Qué relación encuentra?

   d) Comparar en $Q(x,y)$ el coeficiente de $x.y$ con la coordenada a_{12} y a_{21} de la matriz A. ¿Qué relación encuentra? Habiendo resuelto el punto *a*), ¿Por qué cree que se da esta relación?

   e) Usando los puntos anteriores, dada $P(x,y) = 3x^2 - 4x.y - 6y^2$ hallar una matriz B tal que $Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Use la secuencia de Sturm para caracterizar las siguientes forma cuadráticas:

   a) $Q(x,y,z) = -x^2 + 2xy - 3y^2 - z^2$

   b) $Q(x,y,z) = -x^2 + 2xy - 3y^2 + z^2$

   c) $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2$

   d) $Q(x,y,z) = -x^2 + 2xy - y^2 - z^2$

   e) $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$

3. Caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 - 2.x.y + y^2 - 2.x.z - 2.y.z + z^2$

4. Caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z) = -x^2 + 4.x.y - y^2 + 4.x.z + 4.y.z + z^2$

5. Caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 3x^2 + 4.x.y + 2y^2 + 4.x.z + 4z^2$

6. Caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z) = -x^2 02.x.y - 2y^2 + 2.y.z - z^2$

7. Caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z,w) = x^2+2.x.y+y^2+4.x.z+6.y.z+3z^2-2y.w+w^2$

8. Para cada $k \in \mathbb{R}$, caracterizar la forma cuadrática $Q(x,y,z) = kx^2 - 2x.y + y^2 + kz^2$

Trabajo Práctico 16
Respuestas

1. *a*) $Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & 3x+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 3y.x + 3x.y + y^2 = 2x^2 + 6x.y + y^2$

   b) El coeficiente de x^2 en $Q(x,y)$ es 2, al igual que el lugar a_{11} de la matriz A.

   c) El coeficiente de y^2 en $Q(x,y)$ es 1, al igual que el lugar a_{22} de la matriz A.

   d) El coeficiente de $x.y$ en $Q(x,y)$ es 6, el doble de las coordenadas a_{12} y a_{21} de la matriz A. Esto es porque al realizar ambas multiplicaciones matriciales, se suma un término de la forma $x.y$ y otro de la forma $y.x$.

   e) $B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-4}{2} \\ \frac{-4}{2} & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

2. *a*)
   - $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - Secuencia de Sturm:

     $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, det(-1), det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - $s_2 = det(-1) = -1$
   - $s_3 = det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1).(-3) - 1 \cdot 1 = 2$
   - $s_4 = det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1),2 = -2$
   - $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, -1, 2, -2 \Rightarrow$ como la secuencia va cambiando **siempre** su signo, la forma cuadrática es definida negativa.

   b)
   - $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Secuencia de Sturm:

  $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, det(-1), det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $s_2 = det(-1) = -1$
- $s_3 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1).(-3) - 1 \cdot 1 = 2$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, -1, 2, 2 \Rightarrow$ como la secuencia no va cambiando **siempre** su signo, ni manteniendo **siempre** su signo, la forma cuadrática es indefinida.

c)
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Secuencia de Sturm:

  $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1,\ det(1),\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $s_2 = det(1) = 1$
- $s_3 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 = 2$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 1, 2, 2 \Rightarrow$ como la secuencia va manteniendo **siempre** su signo, la forma cuadrática es definida positiva.

d)
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Secuencia de Sturm:

  $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, det(-1), det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $s_2 = det(-1) = -1$

- $s_3 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1).(-1) - 1 \cdot 1 = 0$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1),0 = 0$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, -1, 0, 0 \Rightarrow$ como la secuencia va cambiando **siempre** su signo (salvo valores nulos), la forma cuadrática es semi-definida negativa.

e)
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Secuencia de Sturm:

  $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1,\ det(1),\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $s_2 = det(1) = 1$
- $s_3 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 1, 0, 0 \Rightarrow$ como la secuencia va manteniendo **siempre** su signo (salvo valores nulos), la forma cuadrática es semi-definida positiva.

3.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $s_1 = 1$
- $s_2 = det(1) = 1$
- $s_3 = det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$

- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 1, 0, -4 \Rightarrow$ como la secuencia no va cambiando **siempre** su signo, ni manteniendo **siempre** su signo, la forma cuadrática es indefinida.

4.
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $s_1 = 1$
- $s_2 = det(-1) = -1$
- $s_3 = det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3$
- No es necesario realizar $s_4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, ya que $s_1, s_2, s_3 = 1, 1, -3 \Rightarrow$ como la secuencia no va cambiando **siempre** su signo, ni manteniendo **siempre** su signo, la forma cuadrática es indefinida.

5.
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $s_1 = 1$
- $s_2 = det(3) = 3$
- $s_3 = det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$
- $s_4 = det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 3, 2, 0 \Rightarrow$ como la secuencia va manteniendo **siempre** su signo (salvo valores nulos), la forma cuadrática es semidefinida positiva.

6.
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $s_1 = 1$

- $s_2 = det(-1) = -1$
- $s_3 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1$
- $s_4 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$
- $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 3, 2, 0 \Rightarrow$ como la secuencia va cambiando **siempre** su signo (salvo valores nulos), la forma cuadrática es semidefinida negativa.

7. - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $s_1 = 1$
   - $s_2 = det(1) = 1$
   - $s_3 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$
   - No hace falta realizar $s_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ ni $s_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ya que $s_1, s_2, s_3 = 1, 1, -1 \Rightarrow$ como la secuencia no va cambiando **siempre** su signo, ni manteniendo **siempre** su signo, la forma cuadrática es indefinida.

8. - $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$
   - $s_1 = 1$
   - $s_2 = det(1) = k$
   - $s_3 = det\begin{pmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = k - 1$
   - $s_4 = det\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k^2 - k$

- Secuencia de Sturm:
  $s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, k, k-1, k^2-k$
- Para que Q sea semi-definida positiva, tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

$$\left\{\begin{array}{cc} a) & 1 \geq 0 \\ b) & k \geq 0 \\ c) & k-1 \geq 0 \\ d) & k^2-k \geq 0 \end{array}\right\}$$

  Notemos que $a)$ se cumple trivialmente, además, si se cumplen $b)$ y $c)$, se cumple $d)$ ya que $k^2-k = k(k-1)$. Basta ver para qué valor de k se cumple $b)$ y $c)$:

$$k \geq 0 \ \wedge \ k-1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0 \ \wedge \ k \geq 1 \Leftrightarrow k \geq 1$$

  Entonces, para que Q sea semi-definida positiva, tiene que cumplirse $k \geq 1$. Si $k > 1$, es definida positiva.
- Para que Q sea semi-definida negativa, tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

$$\left\{\begin{array}{cc} a) & 1 \geq 0 \\ b) & k \leq 0 \\ c) & k-1 \geq 0 \\ d) & k^2-k \leq 0 \end{array}\right\}$$

  Notemos que $a)$ se cumple trivialmente, veamos que $b)$ y $c)$ no se pueden cumplir al mismo tiempo:

$$k \leq 0 \ \wedge \ k-1 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 0 \ \wedge \ k \geq 1 \text{ que es un absurdo}$$

  Entonces, no existe k tal que Q es semi-definida negativa.
- Habiendo contemplado los casos en que sea semi-definida positiva y semi-definida negativa, para el resto de los valores de k (es decir, $k < 1$), la forma cuadrática será indefinida.