

Guía 3

PRELIMINARES

Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto \mathcal{X} es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
 - b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
 - c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).
 La expresión $d(x, y)$ se lee *la distancia entre los puntos x e y* . El par (\mathcal{X}, d) , constituido por el conjunto \mathcal{X} munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.
2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x* , o que *x_n tiende a x* , cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

En tal caso x se llama *el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* y se denota por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

3. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .
4. Una *norma* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
 - b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
 - c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).
 Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de x* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de x representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$ que une a los puntos 0 y x . Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por x y $\|u_x\| = 1$.
5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:

- a) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre x e y no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
- b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor λ , la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
- c) En particular, $d(x, y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

Sobre espacios euclídeos

6. Un *producto interno* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ que posee las siguientes propiedades:
- (i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$
 - 1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
 - 2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
 - (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in \mathbb{V}$.
 - (iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.
7. Un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} munito de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.
8. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathcal{X} = (x_i : i \in \mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de \mathcal{X}* y se denota por $G_{\mathcal{X}}$

$$G_{\mathcal{X}} := [\langle x_i, x_j \rangle]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}.$$

El *Gramiano de \mathcal{X}* , denotado por $G(\mathcal{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathcal{X}}$.

9. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{V} determina unívocamente al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y se llama *la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B}* .
10. Todo espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se convierte en un espacio normado, si para cualquier $x \in \mathbb{V}$ se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ así definida es una norma en \mathbb{V} y se llama la *norma inducida* por el producto interno.

11. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{V}.$$

12. Si \mathbb{V} es un \mathbb{R} -espacio vectorial el *ángulo θ entre dos vectores no nulos x e y* se define mediante la fórmula

$$\cos \theta := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|},$$

donde $\theta \in [0, \pi]$. Notar que $\cos \theta = \langle u_x, u_y \rangle$.

13. Si $\langle y, x \rangle = 0$ se dice que *los vectores x e y son ortogonales* y se denota por $y \perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a x se denota por x^\perp , y se llama el *subespacio ortogonal a x*

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x \rangle = 0\}.$$

En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y, x \rangle = 0$ implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ salvo que $x = 0$ o $y = 0$.

14. Obsérvese que si $x \neq 0$, entonces para todo $y \in \mathbb{V}$ vale que

$$y = \langle y, u_x \rangle u_x + (y - \langle y, u_x \rangle u_x).$$

15. El *teorema de Pitágoras* establece que si x e y son ortogonales, vale que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

16. Un sistema de vectores $\mathcal{S} = \{v_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ para todo } i \neq j.$$

Obsérvese que \mathcal{S} es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de \mathcal{S} son diagonales.

17. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando

$$\|u_i\| = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{I}.$$

18. Si \mathcal{V} es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a \mathcal{V}* , denotado por \mathcal{V}^\perp , se define por

$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathbb{V} : \langle x, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$$

19. El *producto interno canónico en \mathbb{K}^n* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ se define por

$$\langle x, y \rangle := y^* x,$$

donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y . Notar que $y^* x = x^T \overline{y}$.

20. El *producto interno canónico en $\mathbb{K}^{m \times n}$* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ se define por

$$\langle X, Y \rangle := \text{tr}(Y^* X),$$

donde $Y^* := \overline{Y^T}$ es la matriz traspuesta conjugada de Y . Notar que $\text{tr}(Y^* X) = \text{tr}(X^T \overline{Y})$.

EJERCICIOS

3.1 [ver **Ejercicio 2.2**] Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

(a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por


$$\phi(v) := \langle v, v_0 \rangle$$

es una funcional lineal de \mathbb{V} . Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que $\mathbb{V} = \text{Nu}(\phi) \oplus \text{gen}\{v_0\}$.

(b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(v) := \langle v_0, v \rangle$$

no es una funcional lineal de \mathbb{V} .

: repasar la definición de producto interno.

3.2 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo de dimensión 2 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de \mathbb{V} . Sean $x = x_1v_1 + x_2v_2$ y $y = y_1v_1 + y_2v_2$ vectores cualesquiera de \mathbb{V} .

(a) Utilizar las propiedades del producto interno para comprobar que

$$\langle x, y \rangle = x_1\overline{y_1} \langle v_1, v_1 \rangle + x_1\overline{y_2} \langle v_1, v_2 \rangle + x_2\overline{y_1} \langle v_2, v_1 \rangle + x_2\overline{y_2} \langle v_2, v_2 \rangle.$$

(b) Observar que la identidad precedente se puede escribir en cualquiera de las siguientes dos formas equivalentes

$$\langle x, y \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$


(c) Notar que las identidades anteriores significan que

$$\langle x, y \rangle = [x]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = [y]^{\mathcal{B}*} G_{\mathcal{B}}^T [x]^{\mathcal{B}},$$

donde $G_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es la matriz de Gram definida por

$$G_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix}$$

(d) Comprobar que $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^*$ y que $\det(G_{\mathcal{B}}) > 0$.

: repasar la definición de producto interno y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ¿Qué papel juega la hipótesis $\dim(\mathbb{V}) = 2$? ¿Qué forma adoptaría este ejercicio si se asume que $\dim(\mathbb{V}) = n$?

3.3  En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y \rangle := y^T G x$$


define un producto interno en \mathbb{R}^2 :


$$(a) G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$


$$(b) G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}.$$

$$(c) G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1 \ell_2 \cos \theta \\ \ell_1 \ell_2 \cos \theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi), \ell_1 > 0, \ell_2 > 0 \right\}.$$

$$(d) G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0, \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}.$$

: observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en \mathbb{R}^2 ? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G ? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vértices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G ?

3.4  Hallar todos los productos internos en \mathbb{R}^2 que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = [1 \ 1]^T$ y $v_2 = [-1 \ 1]^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2 ? ¿Cómo depende del producto interno elegido?

3.5  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de \mathbb{V} tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.


(a) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B}


(b) Hallar la matriz $\Theta := [\text{arc cos}(\langle u_i, u_j \rangle)]_{\substack{i \in \mathbb{I}_3 \\ j \in \mathbb{I}_3}}$.

(c) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

(d) Calcular el área del triángulo de vértices $0, u_1, u_2$.

(e) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3 .

3.6  Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno en \mathbb{V} . Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes. Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ es π .

: Razón por la cual se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo real.


3.7 En el espacio euclídeo de las matrices de 2×2 a coeficientes reales con el producto interno canónico se consideran las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcular las siguientes magnitudes: $\langle A_1, A_2 \rangle$, $\|A_1\|$ y $\|A_2\|$, $\arccos \left(\frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\|A_1\| \|A_2\|} \right)$.
- (b) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$, A_1 , $A_2 - \lambda A_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?
- (c) Calcular el perímetro y el área del triángulo de vértices $0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$, A_1 , A_2 .
- (d) Hallar una base ortonormal del subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\{A_1, A_2\}$.
- (e) Hallar una base ortonormal del subespacio \mathbb{S}^\perp .
- (f) Escribir cada matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ en la forma $A = A_{\mathbb{S}} + A_{\mathbb{S}^\perp}$ con $A_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $A_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$.
- (g) Utilizar el *teorema de Pitágoras* para deducir que

$$\|A - A_{\mathbb{S}}\| = \min_{B \in \mathbb{S}} \|A - B\|.$$

(h) Calcular la distancia de cada uno de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ al subespacio \mathbb{S} .

3.8  Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ munido con $\langle A, B \rangle_W := \text{tr}(A^T W B)$, donde

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ define un producto interno en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$, hallar una base ortogonal del subespacio


$$\mathbb{S} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y otra del subespacio \mathbb{S}^\perp .

(c) Escribir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

en la forma $A = A_{\mathbb{S}} + A_{\mathbb{S}^\perp}$ con $A_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $A_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$.

: En general, ¿cómo debe ser la matriz $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ para que $\langle A, B \rangle_W := \text{tr}(A^T W B)$ defina un producto interno en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

3.9 Sea $(\mathbb{R}^{n \times n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}})$ el espacio euclídeo de las matrices de $n \times n$ a coeficientes reales con el producto interno canónico

$$\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \text{tr}(A^T B),$$

y sea $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la *norma de Frobenius* definida por

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}}}.$$

(a) Comprobar que si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal, entonces $\|\Lambda\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2}$.

(b) Comprobar que $\|A\|_F = \|A^T\|_F$ para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(c) Observar que

$$\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \sum_{j=1}^n \langle A_{*j}, B_{*j} \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ es el producto interno canónico de \mathbb{R}^n , y deducir que

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|A_{*j}\|_E^2,$$

donde $\|\cdot\|_E := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}}$ es la norma euclídea canónica en \mathbb{R}^n .


(d) Deducir que

$$\|Ax\|_E^2 \leq \|A\|_F^2 \|x\|_E^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3.10 En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{n \times n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}})$ se considera una sucesión de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Comprobar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $(A_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente y además vale que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k x &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right) x, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k x\|_E &= \left\| \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right) x \right\|_E. \end{aligned}$$

3.11  En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{3 \times 3}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}})$ se considera la matriz A definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando el principio de inducción comprobar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Comprobar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Calcular los siguientes límites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(A^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A^k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \right), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A^k \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T \right)$$

(d) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k x\|_E = 1$

(e) Observar que

$$\begin{aligned} \operatorname{col} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \right) &= \operatorname{nul}(A - I), \\ \operatorname{nul} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \right) &= \operatorname{nul}(A - I)^\perp. \end{aligned}$$

3.12 Sea $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal de vectores en un \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dados $v \in \mathbb{V}$ y $n \in \mathbb{N}$, se considera el problema de hallar el vector $\hat{v}_n \in \operatorname{gen} \{u_i : i \in \mathbb{I}_n\} =: \mathbb{U}_n$ más cercano a v .

(a) Mostrar que para todo $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n a_i u_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - \langle v, u_i \rangle)^2,$$

y deducir de allí que el $\min_{w \in \mathbb{U}_n} \|v - w\|$ se realiza en el vector

$$\hat{v}_n := \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i,$$


y que su valor es

$$\|v - \hat{v}_n\| = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2}.$$

(b) Notar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_n = v$ si, y sólo si, $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2 = \|v\|^2$.

(c) Observar que, para todo $v \in \mathbb{V}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, el vector $v - \hat{v}_n \in \mathbb{U}_n^\perp$. Deducir de allí que $\mathbb{V} = \mathbb{U}_n \oplus \mathbb{U}_n^\perp$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$P_{\mathbb{U}_n}(v) = \hat{v}_n.$$

3.13  En \mathbb{R}^2 con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T G x, \text{ donde } G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

se consideran los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

(a) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $P_{\mathbb{S}_1}(x) = [1 \ 1]^T$ cuya distancia a \mathbb{S}_1 sea igual a 1.

(b) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^2$ cuya distancia a \mathbb{S}_1 coincide con su distancia a \mathbb{S}_2 .


3.14 En \mathbb{R}^4 con el producto interno canónico, sea $\mathbb{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$, donde

$$v_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T \text{ y } v_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T.$$

(a) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^4 sobre \mathbb{S} .

(b) Hallar la proyección ortogonal de $b = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ sobre el subespacio \mathbb{S} .

(c) Calcular la distancia de b al subespacio \mathbb{S} .

3.15  En $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ con el producto interno canónico consideramos el subespacio \mathbb{S} de todas las matrices simétricas.

(a) Dada $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hallar la expresión de $P_{\mathbb{S}}(X)$.


(b) Hallar la proyección ortogonal de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre \mathbb{S} . ¿Cuánto vale la distancia de B al subespacio \mathbb{S} ?

3.16 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Calcular

$$\min_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - a_1x - a_2x^2)^2 dx.$$

3.17  Se considera el espacio euclídeo $(C^\infty([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por


$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Calcular

$$\min_{p \in \mathbb{R}_3[x]} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(x) - p(x))^2 dx.$$

3.18 [ver **Ejercicio 2.25**] Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ una proyección (i.e., $T^2 = T$). Verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) T es una proyección ortogonal.
- (b) Para todo $x, y \in \mathbb{V}$ vale que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$.
- (c) Para todo $x \in \mathbb{V}$ vale que $\|T(x)\| \leq \|x\|$.

3.19  Sea $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio euclídeo canónico. Se consideran un subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^n y una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ cuyas columnas son una base de \mathbb{S} .


(a) Explicar por qué la proyección ortogonal $\mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v)$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones:


$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v) = A\hat{x} \text{ para algún } \hat{x} \in \mathbb{R}^m, \\ A^T(v - \mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v)) = 0. \end{cases}$$

y comprobar que $\hat{x} = A^\#v$, donde $A^\# := (A^T A)^{-1} A^T$.

(b) Deducir que $AA^\# = P_{\mathbb{S}}$ y que $A^\#A = I_{\mathbb{R}^m \times m}$.

(c) Concluir que $d(v, \mathbb{S})^2 = \|v - A\hat{x}\|^2$. Motivo por el cual el vector \hat{x} se denomina *la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = v$* .

: Recordar que, por definición, $P_{\mathbb{S}}(v)$ es el único vector tal que $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ y $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Esto junto con el teorema de Pitágoras es suficiente para comprobar que $d(v, \mathbb{S}) = \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|$.

3.20  En cada uno de los siguientes casos, hallar, \hat{x} , la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = v$ y calcular el error cuadrático $\|v - A\hat{x}\|^2$:

(a)


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 5.07 \\ 10.43 \\ 15.94 \end{bmatrix}.$$

3.21  Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -14 & -5 & -4 & 1 & 22 \end{array}$$


mediante una recta $y = a_0 + a_1x$, mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y mediante una cúbica $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. ¿Cuál de esas tres curvas se ajusta mejor a los datos?

3.22 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad virósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x , de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t , medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b , utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

$$\begin{array}{c|ccccc} t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline x & 16 & 27 & 45 & 74 & 122 \end{array}$$


Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

: ¿Qué transformación convierte una función exponencial en una función lineal?

3.23  En cada uno de los siguientes casos, utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir un sistema ortonormal \mathcal{U}_i a partir del conjunto linealmente independiente \mathcal{L}_i dado.

En \mathbb{R}^3 con el producto interno canónico:

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

: ¿Qué modificaciones hay que introducir en el algoritmo de Gram-Schmidt si se desea producir un sistema ortonormal a partir de un conjunto finito de vectores cualquiera?

3.24 Hallar una base ortogonal de \mathbb{R}^4 que contenga al vector $[1 \ 2 \ -1 \ -2]$.

3.25 Se consideran el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

y el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) Utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir una base ortonormal $\{p_0, p_1, p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base $\{q_0, q_1, q_2\}$, donde

$$q_0 = 1, \quad q_1 = x, \quad q_2 = x^2.$$

(b) Hallar las siguientes proyecciones ortogonales: $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin x)$, $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos x)$.

(c) Calcular las distancias $d(\sin x, \mathbb{R}_2[x])$, $d(\cos x, \mathbb{R}_2[x])$.

\curvearrowright : Los polinomios p_0, p_1, p_2 así obtenidos son los primeros tres polinomios de Legendre normalizados. Se puede comprobar que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, el polinomio p_n es solución de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

3.26 Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango n .

(a) Comprobar que existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

1. Las columnas de Q son una base ortonormal de $\text{col}(A)$.
2. La matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos.
3. $A = QR$

\curvearrowright : Las columnas de Q se obtienen aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las columnas de A .

(b) Comprobar que la factorización $A = QR$ del inciso anterior es única.


3.27 STOP Hallar la descomposición QR de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

3.28 STOP Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo finito dimensional.

(a) Sea $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ tal que $\phi \neq 0$. Mostrar que $\phi(v) = \langle v, \overline{\phi(w)}w \rangle$, para cualquier $w \in \text{Nu}(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$.

(b) Notar que $\overline{\phi(w)}w$ no depende de la elección de w .


3.29  En $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

se considera $\delta : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por

$$\delta(p) := p(0).$$

Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ hallar y graficar el polinomio $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $\delta(\cdot) = \langle \cdot, p_n \rangle$.

3.30  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal fija. Para $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}$ se define

$$\det(v_1, v_2, v_3) := \det \begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & [v_3]^\mathcal{E} \end{bmatrix}$$

(a) Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$. Comprobar que existe un único vector $v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{V}$ tal que para todo $v \in \mathbb{V}$

$$\det(v_1, v_2, v) = \langle v, v_1 \wedge v_2 \rangle.$$

(b) Explicar por qué $v_1 \wedge v_2$ es ortogonal a v_1, v_2 .

(c) Comprobar que v_1, v_2 son linealmente dependientes si, y sólo si

$$v_1 \wedge v_2 = 0$$

(d) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ la matriz definida por $A := \begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} \end{bmatrix}$. Utilizando la descomposición

$$v_1 \wedge v_2 = \sum_{i=1}^3 \langle e_i, v_1 \wedge v_2 \rangle e_i$$

comprobar que

$$v_1 \wedge v_2 = \sum_{i=1}^3 (-1)^{3-i} \Delta_i e_i,$$

donde Δ_i es el determinante de la matriz de 2×2 que se obtiene de A eliminando su i -ésima fila.

(e) Utilizando el resultado anterior, observar que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

(f) Comprobar que si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{V} , entonces vale que $\det(u_1, u_2, u_3) \in \{-1, 1\}$. Si $\det(u_1, u_2, u_n) = 1$, se dice que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es *orientada positivamente* con respecto a \mathcal{E} .