

TEMA 1

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (2y g(x), x g(x), z^2)$ con $\vec{f}(1, 2, 2) = (8, 2, 4)$, **halle** $g(x)$ para que \vec{f} resulte irrotacional en \mathcal{R}^3 y, en ese caso, **calcule** la circulación de \vec{f} desde $\vec{A} = (0, 2, 2)$ hasta $\vec{B} = (2, 3, 3)$ a lo largo de una curva que una a dichos puntos.

Ya que $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y g(x) & x g(x) & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, g(x) + x g'(x) - 2g(x)) = \vec{0}$ en \mathcal{R}^3 , debe ser:

$$x g'(x) - g(x) = 0 \rightarrow \frac{dg(x)}{g(x)} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \ln |g(x)| = \ln |x| + A \rightarrow |g(x)| = e^A |x| \rightarrow g(x) = Cx.$$

Dado que $\vec{f}(1, 2, 2) = (8, 2, 4) \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow g(x) = 2x \Rightarrow \vec{f}(x, y, z) = (4xy, 2x^2, z^2)$.

Siendo $\vec{f} \in C^1(\mathcal{R}^3)$ e irrotacional, \vec{f} admite función potencial en \mathcal{R}^3 . Entonces la circulación no depende de la curva que se utilice. El cálculo puede hacerse por diferencia de potencial o integrando a lo largo de una curva, en este caso lo más sencillo es integral a lo largo del segmento \overline{AB} desde \vec{A} hasta \vec{B} .

Ecuación del segmento $\vec{X} = \underbrace{\vec{A} + u(\vec{B} - \vec{A})}_{\vec{w}(u)}$ con $0 \leq u \leq 1 \rightarrow \vec{X} = \underbrace{(2u, 2+u, 2+u)}_{\vec{w}(u)}$ con $0 \leq u \leq 1$.

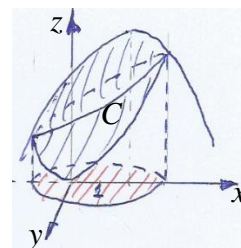
$$\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{w}(u)) \cdot \vec{w}'(u) du = \int_0^1 \underbrace{(8u(2+u), 8u^2, (2+u)^2)}_{25u^2+36u+4} \cdot (2, 1, 1) du = \left[\frac{25}{3}u^3 + 18u^2 + 4u \right]_0^1 = \boxed{\frac{91}{3}}.$$

2. **Calcule** el volumen del cuerpo H definido por: $x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 + 4x$.

La curva intersección de ambas superficies es:

$$C = \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 + 4x \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 + 4x \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 4 \end{cases}$$

Entonces su proyección sobre el plano xy , borde de la proyección D del cuerpo H sobre dicho plano, es $x^2 + y^2 - 2x = 4$ o bien $(x-1)^2 + y^2 = 5$.



$$\text{Vol}(D) = \iiint_H dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2+4x} dz = \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2 + 4x) dx dy$$

Siendo D un círculo con centro en $(1, 0)$ y radio $\sqrt{5}$, aplicando el cambio de variables definido por

$$\begin{cases} x = 1 + r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \text{ con } |J(r, \theta)| = r, \text{ resulta:}$$

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} \underbrace{[8 - 2(r^2 - 1)]}_{10r - 2r^2} r dr = \int_0^{2\pi} [5r^2 - \frac{1}{2}r^4]_0^{\sqrt{5}} d\theta = \frac{25}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{25\pi}.$$

3. **Calcule** la masa de un alambre cuya forma es la de la curva Γ dada por la intersección de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con el plano de ecuación $x + z = 4$ con $x \geq 0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano yz .

Siendo $\Gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 4 \end{cases}$ con $x \geq 0$, admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(2\cos(t), 2\sin(t), 4 - 2\cos(t))}_{\vec{g}(t)}$

con $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ para asegurar $x \geq 0$.

Por otra parte, la densidad es $\delta(x, y, z) = k|x|$, donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. Dado que $x \geq 0$, $|x| = x$, con lo cual $\delta(x, y, z) = kx$.

Entonces, $Masa = \int_{\Gamma} \delta(x, y, z) ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(\vec{g}(t)) \|\vec{g}'(t)\| dt$, donde:

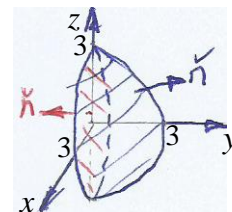
$$\delta(\vec{g}(t)) = k 2 \cos(t), \quad \vec{g}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 2 \sin(t)) \Rightarrow \|\vec{g}'(t)\| = 2\sqrt{1 + \sin^2(t)}.$$

$$Masa = 4k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \sqrt{1 + \sin^2(t)} dt = 4k \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du = 4k \frac{1}{2} [u \sqrt{u^2 + 1} + \sinh^{-1}(u)]_{-1}^1$$

$$\boxed{Masa = 4k[\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)] \equiv 4k[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]}.$$

4. Sea $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ con $\vec{f}(x, 0, z) = (xz, x^2, z^2)$ y $\text{div}(\vec{f}(x, y, z)) = 2y$. Calcule el flujo de \vec{f} a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $y \geq 0$, orientada hacia y^+ .

Dado que $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, agregando Σ_{aux} de ecuación $y = 0$ con $x^2 + z^2 \leq 9$, ver gráfico, se puede aplicar el teorema de la divergencia al cuerpo D cuya superficie frontera es $\Sigma \cup \Sigma_{\text{aux}}$.



$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \text{div}(\vec{f}) dx dy dz$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Sigma_{\text{aux}}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \text{div}(\vec{f}) dx dy dz \quad (\#)$$

Donde $\bar{\Sigma}$ simboliza Σ orientada hacia y^+ , $\bar{\Sigma}_{\text{aux}}$ simboliza Σ_{aux} orientada hacia y^- . Es decir, ambas orientaciones salientes de D .

La proyección del cuerpo contra el plano xz es D_{xz} definida por $x^2 + z^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{\Sigma}_{\text{aux}}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{D_{xz}} \underbrace{\vec{f}(x, 0, z) \cdot (0, -1, 0)}_{-x^2} dx dz = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r^2 \cos^2(\theta) r dr = - \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \\ &= - \frac{81}{4} \frac{1}{2} [\theta + \sin(2\theta)/2]_0^{2\pi} = - \frac{81}{4} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \text{div}(\vec{f}) dx dy dz &= \iint_{D_{xz}} dx dz \int_0^{\sqrt{9-x^2-z^2}} 2y dy = \iint_{D_{xz}} (9-x^2-z^2) dx dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9-r^2) r dr = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

Reemplazando en (#) se obtiene $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma - \frac{81}{4} \pi = \frac{81}{2} \pi$, de donde: $\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{243}{4} \pi}$.

Nota: En ambos casos, para resolver la integral doble en D_{xz} se aplicaron coordenadas polares definidas mediante $(x, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

5. La superficie Σ de ecuación $z = (x-1)y^2 + 2(2-x)y + 3$ tiene dos puntos (A y B) donde sus rectas normales (r_A y r_B) son paralelas al eje z y sea π_0 el plano que contiene a dichas rectas.

Calcule el área del trozo S de π_0 que tiene como bordes: r_A, r_B , la curva intersección de π_0 con Σ y el segmento intersección de π_0 con el plano xy .

Denotando $g(x, y) = (x-1)y^2 + 2(2-x)y + 3$, dado que g es diferenciable por ser polinómica, la superficie Σ tendrá recta normal paralela al eje z (plano tangente horizontal) en puntos $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ donde $\nabla g(x_0, y_0) = \vec{0}$ (puntos estacionarios de g)

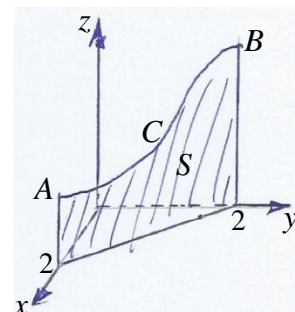
$$\begin{cases} g'_x(x, y) = y^2 - 2y \\ g'_y(x, y) = 2(x-1)y + 2(2-x) \end{cases} \cdot \text{Puntos estac.:} \begin{cases} y^2 - 2y = 0 & \Rightarrow y = 0 \vee y = 2 \\ 2(x-1)y + 2(2-x) = 0 & (*) \end{cases}$$

$$y = 0 \xrightarrow{(*)} 2(2-x) = 0 \Rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0), \quad y = 2 \xrightarrow{(*)} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 2),$$

$$\text{de donde: } \begin{cases} A = (2, 0, g(2, 0)) = (2, 0, 3) \\ B = (0, 2, g(0, 2)) = (0, 2, 7) \end{cases}$$

Observando el esquema, es claro que el plano π_0 que contiene a las rectas r_A y r_B tiene ecuación $x + y = 2$. Como se expresa en el enunciado, la superficie S de la que se pide el área es la parte de este plano entre ambas rectas la curva C y el plano xy . Esta curva C viene dada por la intersección de Σ con π_0 , es decir:

$$C = \begin{cases} z = (x-1)y^2 + 2(2-x)y + 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = (x+1)(2-x)^2 + 3 \\ y = 2-x \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$



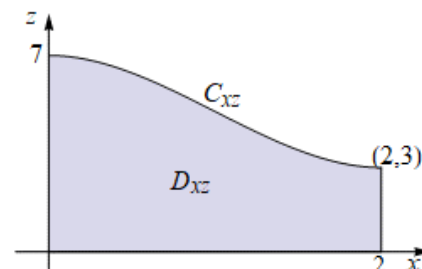
La superficie $S \subset \pi_0$ admite la parametrización:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, 2-x, z)}_{\vec{F}(x,z)} \text{ con } (x, z) \in D_{xz},$$

según se representa a la derecha, donde C_{xz} es la proyección de C sobre el plano xz . En ese plano C_{xz} tiene ecuación:

$$z = (x+1)(2-x)^2 + 3 \text{ con } 0 \leq x \leq 2,$$

es claro que z nunca es negativa.



$$\text{Siendo } \vec{F}'_x \times \vec{F}'_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0) \Rightarrow \|\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z\| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Entonces, } \text{área}(S) = \iint_{D_{xz}} \|\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z\| dx dz = \sqrt{2} \int_0^2 dx \int_0^{(x+1)(2-x)^2+3} dz = \sqrt{2} \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 7) dx$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 7x \right]_0^2}_{=10} = 10\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{área}(S) = 10\sqrt{2}}$$

TEMA 2

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (2z g(x), y^2, x g(x))$ con $\vec{f}(1, 2, 1) = (4, 4, 2)$, **halle** $g(x)$ para que \vec{f} resulte irrotacional en \mathcal{R}^3 y, en ese caso, **calcule** la circulación de \vec{f} desde $\vec{A} = (0, 2, 2)$ hasta $\vec{B} = (2, 3, 3)$ a lo largo de una curva que una a dichos puntos.

Ya que $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2z g(x) & y^2 & x g(x) \end{vmatrix} = (0, 2g(x) - g(x) - xg'(x), 0) = \vec{0}$ en \mathcal{R}^3 , debe ser:

$$g(x) - xg'(x) = 0 \rightarrow \frac{dg(x)}{g(x)} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \ln |g(x)| = \ln |x| + A \rightarrow |g(x)| = e^A |x| \rightarrow g(x) = Cx.$$

Dado que $\vec{f}(1, 2, 1) = (4, 4, 2) \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow g(x) = 2x \Rightarrow \vec{f}(x, y, z) = (4xz, y^2, 2x^2)$.

Siendo $\vec{f} \in C^1(\mathcal{R}^3)$ e irrotacional, \vec{f} admite función potencial en \mathcal{R}^3 . Entonces la circulación no depende de la curva que se utilice. El cálculo puede hacerse por diferencia de potencial o integrando a lo largo de una curva, en este caso lo más sencillo es integral a lo largo del segmento \overline{AB} desde \vec{A} hasta \vec{B} .

Ecuación del segmento $\vec{X} = \underbrace{\vec{A} + u(\vec{B} - \vec{A})}_{\vec{w}(u)}$ con $0 \leq u \leq 1 \rightarrow \vec{X} = \underbrace{(2u, 2+u, 2+u)}_{\vec{w}(u)}$ con $0 \leq u \leq 1$.

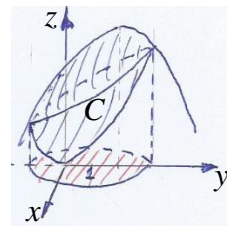
$$\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{w}(u)) \cdot \vec{w}'(u) du = \int_0^1 \underbrace{(8u(2+u), (2+u)^2, 8u^2)}_{25u^2+36u+4} \cdot (2, 1, 1) du = \left[\frac{25}{3}u^3 + 18u^2 + 4u \right]_0^1 = \boxed{\frac{91}{3}}.$$

2. **Calcule** el volumen del cuerpo H definido por: $x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 + 4y$.

La curva intersección de ambas superficies es:

$$C = \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 + 4y \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 + 4y \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases}$$

Entonces su proyección sobre el plano xy , borde de la proyección D del cuerpo H sobre dicho plano, es $x^2 + y^2 - 2y = 4$ o bien $x^2 + (y-1)^2 = 5$.



$$\text{Vol}(D) = \iiint_H dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2+4y} dz = \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2 + 4y) dx dy$$

Siendo D un círculo con centro en $(0, 1)$ y radio $\sqrt{5}$, aplicando el cambio de variables definido por

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = 1 + r \sin(\theta) \end{cases} \text{ con } |J(r, \theta)| = r, \text{ resulta:}$$

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} \underbrace{[8 - 2(r^2 - 1)]}_{10r - 2r^2} r dr = \int_0^{2\pi} [5r^2 - \frac{1}{2}r^4]_0^{\sqrt{5}} d\theta = \frac{25}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{25\pi}.$$

3. **Calcule** la masa de un alambre cuya forma es la de la curva Γ dada por la intersección de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con el plano de ecuación $y + z = 4$ con $y \geq 0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xz .

Siendo $\Gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + z = 4 \end{cases}$ con $y \geq 0$, admite la parametrización $\vec{X} = \underbrace{(2 \cos(t), 2 \sin(t), 4 - 2 \sin(t))}_{\vec{g}(t)}$

con $0 \leq t \leq \pi$ para asegurar $y \geq 0$.

Por otra parte, la densidad es $\delta(x, y, z) = k|y|$, donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. Dado que $y \geq 0$, $|y| = y$, con lo cual $\delta(x, y, z) = ky$.

Entonces, $Masa = \int_{\Gamma} \delta(x, y, z) ds = \int_0^{\pi} \delta(\vec{g}(t)) \|\vec{g}'(t)\| dt$, donde:

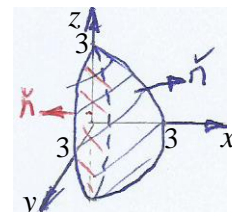
$$\delta(\vec{g}(t)) = k 2 \operatorname{sen}(t), \quad \vec{g}'(t) = (-2 \operatorname{sen}(t), 2 \cos(t), -2 \cos(t)) \Rightarrow \|\vec{g}'(t)\| = 2\sqrt{1 + \cos^2(t)}.$$

$$Masa = 4k \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t) \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt = -4k \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du = -4k \frac{1}{2} [u \sqrt{u^2 + 1} + \operatorname{senh}^{-1}(u)]_1^{-1}$$

$$\boxed{Masa = 4k[\sqrt{2} + \operatorname{senh}^{-1}(1)] \equiv 4k[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]}.$$

4. Sea $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ con $\vec{f}(0, y, z) = (y^2, yz, z^2)$ y $\operatorname{div}(\vec{f}(x, y, z)) = 2x$. Calcule el flujo de \vec{f} a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x \geq 0$, orientada hacia x^+ .

Dado que $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, agregando Σ_{aux} de ecuación $x = 0$ con $y^2 + z^2 \leq 9$, ver gráfico, se puede aplicar el teorema de la divergencia al cuerpo D cuya superficie frontera es $\Sigma \cup \Sigma_{\text{aux}}$.



$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy dz$$

$$\iint_{\bar{\Sigma}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\bar{\Sigma}_{\text{aux}}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy dz \quad (\#)$$

Donde $\bar{\Sigma}$ simboliza Σ orientada hacia x^+ , $\bar{\Sigma}_{\text{aux}}$ simboliza Σ_{aux} orientada hacia x^- . Es decir, ambas orientaciones salientes de D .

La proyección del cuerpo contra el plano yz es D_{yz} definida por $y^2 + z^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{\Sigma}_{\text{aux}}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{D_{yz}} \underbrace{\vec{f}(0, y, z) \cdot (-1, 0, 0)}_{-y^2} dy dz = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r^2 \cos^2(\theta) r dr = -\frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \\ &= -\frac{81}{4} \frac{1}{2} [\theta + \operatorname{sen}(2\theta)/2]_0^{2\pi} = -\frac{81}{4} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f}) dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} 2x dx = \iint_{D_{yz}} (9 - y^2 - z^2) dy dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9 - r^2) r dr = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

Reemplazando en (#) se obtiene $\iint_{\bar{\Sigma}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma - \frac{81}{4} \pi = \frac{81}{2} \pi$, de donde: $\boxed{\iint_{\bar{\Sigma}} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{243}{4} \pi}$.

Nota: En ambos casos, para resolver la integral doble en D_{yz} se aplicaron coordenadas polares definidas mediante $(y, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))$.

5. La superficie Σ de ecuación $z = (y-1)x^2 + 2(2-y)x + 3$ tiene dos puntos (A y B) donde sus rectas normales (r_A y r_B) son paralelas al eje z y sea π_0 el plano que contiene a dichas rectas.

Calcule el área del trozo S de π_0 que tiene como bordes: r_A, r_B , la curva intersección de π_0 con Σ y el segmento intersección de π_0 con el plano xy .

Denotando $g(x, y) = (y-1)x^2 + 2(2-y)x + 3$, dado que g es diferenciable por ser polinómica, la superficie Σ tendrá recta normal paralela al eje z (plano tangente horizontal) en puntos $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ donde $\nabla g(x_0, y_0) = \vec{0}$ (puntos estacionarios de g)

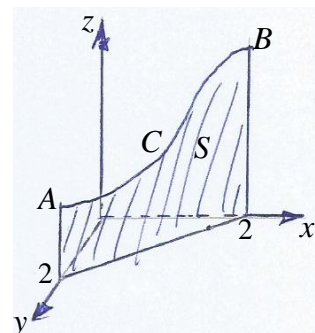
$$\begin{cases} g'_x(x, y) = 2x(y-1) + 2(2-y) \\ g'_y(x, y) = x^2 - 2x \end{cases} \text{ . Puntos estac.: } \begin{cases} 2x(y-1) + 2(2-y) = 0 \quad (*) \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$x = 0 \xrightarrow{(*)} 2(2-y) = 0 \Rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2) \quad , \quad x = 2 \xrightarrow{(*)} 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow (2, 0),$$

$$\text{de donde: } \begin{cases} A = (0, 2, g(0, 2)) = (0, 2, 3) \\ B = (2, 0, g(2, 0)) = (2, 0, 7) \end{cases}$$

Observando el esquema, es claro que el plano π_0 que contiene a las rectas r_A y r_B tiene ecuación $x + y = 2$. Como se expresa en el enunciado, la superficie S de la que se pide el área es la parte de este plano entre ambas rectas la curva C y el plano xy . Esta curva C viene dada por la intersección de Σ con π_0 , es decir:

$$C = \begin{cases} z = (y-1)x^2 + 2(2-y)x + 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = (y+1)(2-y)^2 + 3 \\ x = 2-y \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 2.$$



La superficie $S \subset \pi_0$ admite la parametrización:

$$\vec{X} = \underbrace{(2-y, y, z)}_{\vec{F}(y,z)} \text{ con } (y, z) \in D_{yz},$$

según se representa a la derecha, donde C_{yz} es la proyección de C sobre el plano yz . En ese plano C_{yz} tiene ecuación:

$$z = (y+1)(2-y)^2 + 3 \text{ con } 0 \leq y \leq 2,$$

es claro que z nunca es negativa.

$$\text{Siendo } \vec{F}'_y \times \vec{F}'_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0) \Rightarrow \|\vec{F}'_y \times \vec{F}'_z\| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Entonces, } \text{área}(S) = \iint_{D_{yz}} \|\vec{F}'_y \times \vec{F}'_z\| \, dx \, dz = \sqrt{2} \int_0^2 dy \int_0^{(y+1)(2-y)^2+3} dz = \sqrt{2} \int_0^2 (y^3 - 3y^2 + 7) \, dy$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{4}y^4 - y^3 + 7y \right]_0^2}_{=10} = 10$$

$$\boxed{\text{área}(S) = 10\sqrt{2}}$$

