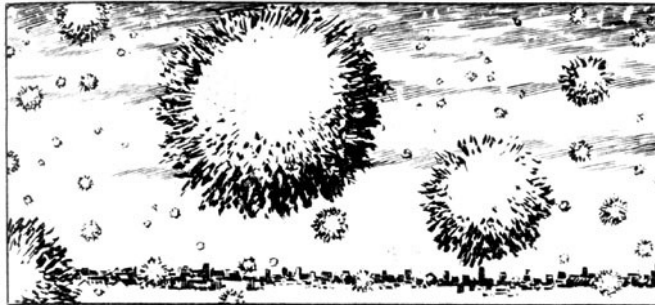


---

Álgebra II (Curso 23)  
Segundo cuatrimestre, 2021  
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:  
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 4 DE OCTUBRE  
Sebastian GRYNBERG

---



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,  
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Transformaciones lineales	2
1.1. El espacio vectorial de las transformaciones lineales	2
1.2. Composición de transformaciones lineales	2
2. Representaciones matriciales	2
2.1. Matriz de una transformación respecto de dos bases	2
2.2. Cálculo del núcleo y de la imagen	4
2.3. El espacio vectorial de las transformaciones lineales	6
2.4. Composiciones	6
2.5. Cambio de bases	8

## 1. TRANSFORMACIONES LINEALES

## 1.1. El espacio vectorial de las transformaciones lineales.

**Notación.** El conjunto de todas las transformaciones lineales de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$  se denota por  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) := \{T \in \mathbb{W}^{\mathbb{V}} : T \text{ es una transformación lineal de } \mathbb{V} \text{ en } \mathbb{W}\}.$$

En el caso en que  $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ , en lugar de escribir  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$  escribiremos  $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ .

**Nota Bene.** Si definimos la suma vectorial  $+$  :  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \times \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  y la multiplicación escalar  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  mediante las operaciones punto a punto

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(v) &:= T_1(v) + T_2(v) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}, \\ (a \cdot T)(v) &:= aT(v) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V},\end{aligned}$$

el conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  se convierte en un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, cuyo vector cero es la transformación lineal nula  $0_{\mathbb{W}\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  definida por

$$0_{\mathbb{W}\mathbb{V}}(v) := 0_{\mathbb{W}} \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}.$$

## 1.2. Composición de transformaciones lineales.

Sean  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{W}$  y  $\mathbb{U}$  tres  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Si  $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  y  $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$ , la *composición de  $T_2$  con  $T_1$*  es la aplicación

$$T_2 \circ T_1 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$$

definida por

$$(T_2 \circ T_1)(v) := T_2(T_1(v)).$$

La composición de  $T_2$  con  $T_1$  también es una transformación lineal porque

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(av_1 + v_2) &= T_2(T_1(av_1 + v_2)) \\ &= T_2(aT_1(v_1) + T_1(v_2)) \\ &= aT_2(T_1(v_1)) + T_2(T_1(v_2)) \\ &= a(T_2 \circ T_1)(v_1) + (T_2 \circ T_1)(v_2).\end{aligned}$$

## 2. REPRESENTACIONES MATRICIALES

**Comentario.** En el corazón del álgebra lineal está el reconocimiento de que la teoría de las transformaciones lineales de dimensión finita es esencialmente la misma que la teoría de las matrices.

## 2.1. Matriz de una transformación respecto de dos bases.

Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $\mathbb{W}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $m$ . Fijamos  $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{w_i : i \in \mathbb{I}_m\}$  bases de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$ , respectivamente, y consideramos una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ .

Para cada vector  $v \in \mathbb{V}$  sabemos que si  $[v]^{\mathcal{B}} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ , entonces

$$T(v) = \sum_{j=1}^n x_j T(v_j).$$

Utilizando que la aplicación de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{K}^m$  definida por  $w \mapsto [w]^{\mathcal{B}'}$  es una transformación lineal, obtenemos que

$$\begin{aligned} [T(v)]^{\mathcal{B}'} &= \left[ \sum_{j=1}^n x_j T(v_j) \right]^{\mathcal{B}'} = \sum_{j=1}^n x_j [T(v_j)]^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{bmatrix} [T(v_1)]^{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(v_n)]^{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} [v]^{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

**Nota Bene.** Nótese que si  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  es una matriz tal que  $[T(v)]^{\mathcal{B}'} = A[v]^{\mathcal{B}}$  para todo  $v \in \mathbb{V}$ , entonces  $A = \begin{bmatrix} [T(v_1)]^{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(v_n)]^{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$ . En efecto, como para todo  $j \in \mathbb{I}_n$  vale que  $[v_j]^{\mathcal{B}} = e_j$ , tenemos que  $[T(v_j)]^{\mathcal{B}'} = Ae_j = A_{*j}$ .  $\square$

**Definición 2.1.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ . La matriz de  $T$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  es la matriz  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definida por

$$(1) \quad [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} := \begin{bmatrix} [T(v_1)]^{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(v_n)]^{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}.$$

En palabras, la  $j$ -ésima columna de la matriz de  $T$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  es el vector de coordenadas, respecto de la base  $\mathcal{B}'$ , de la imagen por  $T$  del  $j$ -ésimo vector de la base  $\mathcal{B}$ .

**Teorema 2.2.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ , y sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  bases de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$ , respectivamente. Para cada  $v \in \mathbb{V}$ , la acción de  $T$  sobre  $v$  está determinada por la multiplicación matricial en el siguiente sentido

$$(2) \quad [T(v)]^{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [v]^{\mathcal{B}}.$$

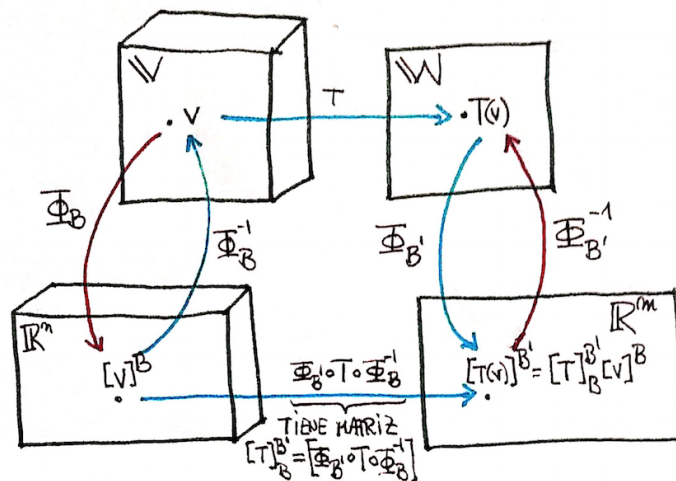


FIGURA 1. Matriz de una transformación lineal respecto de las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ .

**Ejemplo 2.3.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ . Sean  $\mathcal{B}_1 = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$  y  $\mathcal{B}_2$  dos bases de  $\mathbb{V}$ , y sea  $I_{\mathbb{V}} \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$  la transformación lineal identidad de  $\mathbb{V}$ . La matriz de  $I_{\mathbb{V}}$  respecto de las bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  es la matriz de cambio de coordenadas de la base  $\mathcal{B}_1$  en la base  $\mathcal{B}_2$ . En efecto,

$$\begin{aligned} [I_{\mathbb{V}}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} &= [[I_{\mathbb{V}}(v_1)]^{\mathcal{B}_2} \quad \cdots \quad [I_{\mathbb{V}}(v_n)]^{\mathcal{B}_2}] \\ &= [[v_1]^{\mathcal{B}_2} \quad \cdots \quad [v_n]^{\mathcal{B}_2}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.4.** Sean  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  las bases canónicas de  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathbb{K}^m$ , respectivamente, y sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ . Sabemos que para cada  $x \in \mathbb{K}^n$  vale que  $T(x) = A_T x$ , donde  $A_T \in \mathbb{K}^{m \times n}$  es la matriz definida por

$$A_T := [T(e_1) \quad \cdots \quad T(e_n)].$$

Pero como  $[x]^{\mathcal{E}} = x$  y  $[T(x)]^{\mathcal{E}'} = T(x)$  esto significa que  $[T(x)]^{\mathcal{E}'} = A_T [x]^{\mathcal{E}}$ , y como además la matriz de  $T$  respecto de las bases  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  es única, se concluye que

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = [T(e_1) \quad \cdots \quad T(e_n)].$$

□

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}_3[x]$  y sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$  la transformación lineal definida por  $T(p) := p + (1-x)p'$ . Hallar  $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ , la matriz de  $T$  con respecto a la base  $\mathcal{E}$ .

Por definición,

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} [T(1)]^{\mathcal{E}} & [T(x)]^{\mathcal{E}} & [T(x^2)]^{\mathcal{E}} & [T(x^3)]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}.$$

De

- $T(1) = 1 + (1-x)0 = 1,$
- $T(x) = x + (1-x)1 = 1,$
- $T(x^2) = x^2 + (1-x)2x = 2x - x^2,$
- $T(x^3) = x^3 + (1-x)3x^2 = 3x^2 - 2x^3,$

se deduce que

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

## 2.2. Cálculo del núcleo y de la imagen.

Sean  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{W}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dimensión  $m$ , y  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ . Fijamos una base  $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$  de  $\mathbb{V}$  y una base  $\mathcal{B}' = \{w_i : i \in \mathbb{I}_m\}$  de  $\mathbb{W}$ . Designamos mediante  $\Phi_{\mathcal{B}}$  y  $\Phi_{\mathcal{B}'}$  a sus respectivos isomorfismos de coordenadas.

**Nota Bene.** Nótese que por (2) es inmediato que

$$(3) \quad T(v) = w \iff [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [v]^{\mathcal{B}} = [w]^{\mathcal{B}'}$$

En consecuencia,

$$(4) \quad T^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \left( \left\{ x \in \mathbb{K}^n : [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} x = [w]^{\mathcal{B}'} \right\} \right).$$

**Lema 2.6.** *Vale que*

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \left( \text{nul} \left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right) \right) &= \text{Nu}(T), \\ \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \left( \text{col} \left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right) \right) &= \text{Im}(T). \end{aligned}$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Corolario 2.7.** *Vale que*

1.  $T$  es monomorfismo si, y sólo si,  $\text{nul} \left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right) = \{0\}$ .
2.  $T$  es epimorfismo si, y sólo si,  $\text{col} \left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right) = \mathbb{K}^m$ .
3.  $T$  es isomorfismo si, y sólo si,  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  es inversible.

*Demostración.* Ejercicio. □

**Ejemplo 2.8.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3)$  la transformación lineal considerada en el **Ejemplo 2.5**

(a) Hallar  $\text{nul}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})$  y  $\text{col}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})$ .

Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz  $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$  para obtener su forma escalonada por filas reducida,

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \text{nul}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) &= \{x \in \mathbb{R}^4 : [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2, x_3 = x_4 = 0\} \\ &= \text{gen} \left\{ [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T \right\}, \\ \text{col}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) &= \text{gen} \left\{ [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T, [0 \quad 0 \quad 3 \quad -2]^T \right\}. \end{aligned}$$

(b) Hallar  $\text{Nu}(T)$  e  $\text{Im}(T)$ .

Como  $\mathcal{E}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}_3[x]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Nu}(T) &= \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \left( \text{nul}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) \right) = \text{gen} \{1 - x\}, \\ \text{Im}(T) &= \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \left( \text{col}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) \right) = \text{gen} \{1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3\}. \end{aligned}$$

□

### 2.3. El espacio vectorial de las transformaciones lineales.

**Lema 2.9.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $\mathbb{W}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dimensión  $m$ . Fijamos  $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{w_i : i \in \mathbb{I}_m\}$  bases de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$ , respectivamente. Para cada  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ , y para cada  $a \in \mathbb{K}$  vale que

$$(5) \quad [T_1 + T_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [T_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'},$$

$$(6) \quad [a \cdot T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = a \cdot [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

En otras palabras, la aplicación  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$  definida por

$$(7) \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T) := [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

es una transformación lineal.

*Demostración.* Ejercicio. □

**Teorema 2.10.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $\mathbb{W}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dimensión  $m$ . Vale que

$$\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \simeq \mathbb{K}^{m \times n}.$$

*Demostración.* Fijamos  $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{w_i : i \in \mathbb{I}_m\}$  bases de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$ , respectivamente, y consideramos la transformación lineal  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  de  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  en  $\mathbb{K}^{m \times n}$  definida en el **Lema 2.9**.

Esta claro que  $\text{Nu}(\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \{0_{\mathbb{W}\mathbb{V}}\}$ . Consecuentemente,  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  es un monomorfismo.

En lo que sigue vamos a construir transformaciones lineales  $T_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  tales que para cada  $i \in \mathbb{I}_m$  y cada  $j \in \mathbb{I}_n$ , valga que

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T_{ij}) = E_{ij},$$

donde  $\{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{K}^{m \times n}$ . Para eso basta definir  $T_{ij}$  sobre la base  $\mathcal{B}$ :

$$T_{ij}(v_k) := \begin{cases} w_i & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Como

$$\text{Im}(\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) \supseteq \text{gen} \left\{ \Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T_{ij}) : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n \right\} = \text{gen} \{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} = \mathbb{K}^{m \times n},$$

se concluye que  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  es un epimorfismo. □

### 2.4. Composiciones.

**Lema 2.11.** Sean  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  y  $\mathbb{U}$  tres  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Si  $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  y  $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$ , y si  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B}''$  son bases de  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  y  $\mathbb{U}$ , respectivamente, entonces  $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$  y

$$(8) \quad [T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [T_2]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

*Demostración.* Por definición, sabemos que la columna  $j$  de la matriz  $[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$  es  $[(T_2 \circ T_1)(v_j)]^{\mathcal{B}''}$ , donde  $v_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base  $\mathcal{B}$ :

$$[(T_2 \circ T_1)(v_j)]^{\mathcal{B}''} = [T_2(T_1(v_j))]^{\mathcal{B}''}.$$

Por otra parte, la columna  $j$  de la matriz  $[T_2]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [T_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  es  $[T_2]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [T_1(v_j)]^{\mathcal{B}'}$ :

$$[T_2]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [T_1(v_j)]^{\mathcal{B}'} = [T_2(T_1(v_j))]^{\mathcal{B}''}.$$

□

**Corolario 2.12.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  dos  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita y sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  es un isomorfismo. Si  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  son bases de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$ , respectivamente, entonces

$$(9) \quad [T^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1}.$$

*Demostración.* De la identidad  $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{V}}$ , y utilizando el resultado del lema anterior, se deduce que

$$I = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Por lo tanto,  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  es inversible y su inversa es  $\left( [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ . □

**Ejemplo 2.13.** Sea  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  la transformación lineal definida por

$$T(p) = p - p'.$$

(a) Comprobar que  $T$  es un isomorfismo.

El núcleo de  $T$  es el subespacio nulo porque las soluciones de la ecuación diferencial  $y' = y$  tienen la forma  $y = ae^x$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Entre esas, la única que es un polinomio, es  $y = 0$ . Como  $T$  es un monomorfismo de  $\mathbb{R}_2[x]$  en sí mismo, se tiene que  $T$  es un isomorfismo.

(b) Hallar  $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ , la matriz de  $T$  con respecto a la base canónica  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

Por definición, tenemos que  $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} [T(1)]^{\mathcal{E}} & [T(x)]^{\mathcal{E}} & [T(x^2)]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$ . De los resultados,  $T(1) = 1$ ,  $T(x) = x - 1$ , y  $T(x^2) = x^2 - 2x$ , se deduce que

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar  $[T^{-1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ , la matriz de la inversa de  $T$  con respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

$$[T^{-1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \left( [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Sea  $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ . Hallar el vector de coordenadas de  $T^{-1}(q)$  en base canónica de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

Usamos que  $[T^{-1}(q)]^{\mathcal{E}} = [T^{-1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [q]^{\mathcal{E}} = \left( [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \right)^{-1} [q]^{\mathcal{E}}$  y obtenemos que

$$[T^{-1}(q)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 + 2b_2 \\ b_1 + 2b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

(e) Sea  $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ . Hallar la expresión de  $T^{-1}(q)$  en base canónica de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

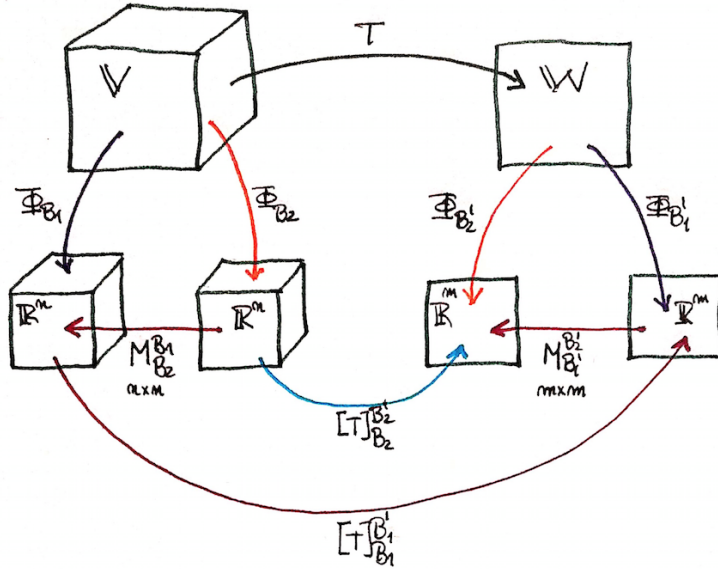
$$T^{-1}(q) = (b_0 + b_1 + 2b_2) + (b_1 + 2b_2)x + b_2x^2.$$

□

## 2.5. Cambio de bases.

**Teorema 2.14.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  dos  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  dos bases de  $\mathbb{V}$ , y  $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$  dos bases de  $\mathbb{W}$ . Si  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ , entonces

$$(10) \quad [T]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} = M_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1} M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}.$$



*Demostración.* Observar que  $T = I_{\mathbb{W}} \circ T \circ I_{\mathbb{V}}$ , utilizar dos veces el resultado del **Lema 2.11**, y para concluir utilizar el resultado del **Ejemplo 2.3**:

$$[T]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} = [I_{\mathbb{W}} \circ T \circ I_{\mathbb{V}}]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} = [I_{\mathbb{W}} \circ T]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} [I_{\mathbb{V}}]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} = [I_{\mathbb{W}}]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} [T]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} [I_{\mathbb{V}}]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} = M_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} [T]_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}'_1} M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}.$$

□

**Ejemplo 2.15.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$  la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathcal{B}$  es la base  $\mathbb{R}_2[x]$  definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(x-1)(x-2), -(x-1)(x-3), \frac{1}{2}(x-2)(x-3) \right\},$$

y  $\mathcal{C}$  es la base de  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Analizar las propiedades de  $T$ .

Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  para obtener su forma escalonada por filas reducida,

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \text{nul}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3, x_2 = 0\} \\ &= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}, \\ \text{col}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) &= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

Lo que en términos del núcleo y la imagen de  $T$  se traduce de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Nu}(T) &= \text{gen} \left\{ \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)(x-3) \right\} \\ &= \text{gen} \{(x-2)^2\} = \text{gen} \{x^2 - 4x + 4\}, \\ \text{Im}(T) &= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

En particular, como  $\text{Nu}(T) \neq \{0\}$ ,  $T$  no es un monomorfismo, y como  $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$ ,  $T$  no es un epimorfismo.

(b) Hallar la matriz de  $T$  con respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}_2[x]$  y la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizamos una variante de la fórmula (10):

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

Como la base  $\mathcal{B}$  es la base de polinomios de Lagrange que corresponde a muestrear en los puntos  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ , sabemos que  $[p]_{\mathcal{B}} = [p(3) \ p(2) \ p(1)]^T$ , y

en consecuencia

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & 20 \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar la matriz de  $T$  con respecto a la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[x]$  y la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizamos una variante de la fórmula (10):

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 \\ -5 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Hallar la matriz de  $T$  con respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}_2[x]$  y  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizamos una variante de la fórmula (10):

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 \\ -5 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 44 \\ -3 & -16 & -52 \\ -3 & -8 & -20 \end{bmatrix}.$$

(e) Hallar la imagen por  $T$  del subespacio  $\text{gen}\{-1+x, 2x-3x^2\}$ .

La imagen por  $T$  del subespacio  $\mathbb{S} = \text{gen}\{-1+x, 2x-3x^2\}$  es el subespacio generado por  $\{T(-1+x), T(2x-3x^2)\}$ . Como

$$T(-1+x) = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [-1+x]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 44 \\ -3 & -16 & -52 \\ -3 & -8 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$T(2x-3x^2) = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [2x-3x^2]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 44 \\ -3 & -16 & -52 \\ -3 & -8 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -92 \\ 124 \\ 44 \end{bmatrix},$$

aplicando el algoritmo espacio filas a los dos vectores que aparecen del lado derecho de las últimas igualdades, se obtiene que la imagen por  $T$  del subespacio  $\mathbb{S}$  es el subespacio generado por  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}^T \right\}$ .

(f) Hallar la preimagen por  $T$  del subespacio  $\mathbb{U} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ .

Por definición,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mathbb{U}) &= \{p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) \in \mathbb{U}\} \\ &= \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = a \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado  $a \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$T(p) = a [-3 \ 1 \ 1]^T \iff [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}[p]^{\mathcal{E}} = a [-3 \ 1 \ 1]^T.$$

Escribiendo  $p = b_0 + b_1x + b_2x^2$ , donde  $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , la última ecuación adopta la forma

$$\begin{bmatrix} 9 & 20 & 44 \\ -3 & -16 & -52 \\ -3 & -8 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

Reduciendo el sistema mediante el método de Gauss-Jordan se obtiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$b_0 = -\frac{a}{3} + 4b_2, \quad b_1 = -4b_2.$$

Por lo tanto,

$$T^{-1}(\mathbb{U}) = \left\{ \left( -\frac{a}{3} + 4b_2 \right) - 4b_2x + b_2x^2 : a, b_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\{1, 4 - 4x + x^2\}.$$

Resultado que, visto desde un enfoque teórico más o menos experimentado, podría decirse que es evidente.  $\square$