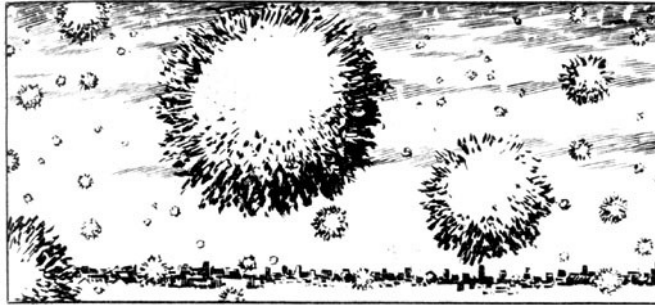

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 6 DE SEPTIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Espacios vectoriales	2
1.1. Preliminares	2
1.2. Definición axiomática de espacio vectorial	3
1.3. Ejemplos	3
1.4. Propiedades elementales	7
1.5. Subespacios	7
1.6. El Lema de 3x8	8
2. Combinaciones lineales	9
2.1. Definición	9
2.2. Ecuaciones y capsulas lineales	10
2.3. Subespacios generados por sistemas de vectores	11
2.4. Ejemplos	12
2.5. Sistemas de generadores minimales	12

1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. Preliminares.

Definición 1.1. Sea \mathbb{G} un conjunto no vacío. Una ley de composición interna definida sobre \mathbb{G} es una aplicación $*$: $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ que para cada par ordenado (a, b) de elementos de \mathbb{G} define unívocamente un elemento $a * b \in \mathbb{G}$, llamado la composición de a con b .

Definición 1.2. Un grupo es un par $(\mathbb{G}, *)$ formado por un conjunto no vacío \mathbb{G} y una ley de composición interna $*$ definida sobre \mathbb{G} que satisface las siguientes propiedades;

- g1) $(\mathbb{G}, *)$ es un semigrupo con elemento identidad:
- $*$ es una ley de composición interna asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c$, cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{G}$.
 - Existe $e \in \mathbb{G}$ tal que $e * a = a * e = a$, cualesquiera sea $a \in \mathbb{G}$.
- g2) Todo elemento de \mathbb{G} es inversible: para todo $a \in \mathbb{G}$ existe $a' \in \mathbb{G}$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Definición 1.3. Un grupo abeliano es un grupo $(\mathbb{G}, *)$ cuya ley de composición interna es conmutativa: $a * b = b * a$, cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{G}$.

Ejemplo 1.4. Si \mathbb{G} denota cualquiera de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $*$ denota la suma $+$ o el producto \cdot de números, se obtiene que

- $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo abeliano sin elemento identidad;
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos y su elemento identidad es el número 0 (cero);
- (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) son semigrupos abelianos con elemento identidad –el número 1 (uno)– pero no son grupos;
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ y $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos y su elemento identidad es el número 1 (uno).


Definición 1.5. Un cuerpo es una terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ formada por un conjunto no vacío \mathbb{K} que tiene por lo menos dos elementos distintos, 0 (cero) y 1 (uno), y dos leyes de composición internas definidas sobre \mathbb{K} , llamadas suma $(+)$ y multiplicación (\cdot) , que satisfacen las siguientes propiedades:

- Las ternas $(\mathbb{K}, +, 0)$ y $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ son dos grupos abelianos.
- La suma y la multiplicación están relacionadas entre sí por la ley distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

cualquiera sean a, b y c en \mathbb{K} .

Ejemplo 1.6. Las ternas $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, son cuerpos.

: A partir de ahora, salvo que diga lo contrario, cuando escriba que \mathbb{K} es un cuerpo pensaré que \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} . El que avisa no es traidor.

1.2. Definición axiomática de espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* involucra cuatro cosas: dos conjuntos \mathbb{V} y \mathbb{K} , y dos operaciones algebraicas llamadas *suma vectorial* y *multiplicación escalar*.

- \mathbb{V} es un conjunto no vacío de objetos llamados *vectores*.
- \mathbb{K} es un cuerpo cuyos elementos se llaman *escalares*.
- La *suma vectorial*, $+$: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, es una operación entre elementos de \mathbb{V} que a cada pareja de vectores (u, v) le asigna unívocamente un vector, denotado $u + v$, que se llama la suma de u y v .
- La *multiplicación escalar*, \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, es una operación entre elementos de \mathbb{K} y elementos de \mathbb{V} que a cada pareja (a, v) , compuesta por un escalar a y un vector v , le asigna unívocamente un vector, denotado $a \cdot v$, que se llama el producto (o la multiplicación) de v por a .

La definición formal (o axiomática) de un espacio vectorial estipula cómo estas cuatro cosas se relacionan entre sí.

Definición 1.7 (Espacios vectoriales). *El conjunto \mathbb{V} se llama un \mathbb{K} -espacio vectorial cuando la suma vectorial y la multiplicación escalar satisfacen las siguientes propiedades*

- I. *El par $(\mathbb{V}, +)$ es un grupo abeliano:*
 - 1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ para cualquier $u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad),
 - 2) Existe un elemento $0 \in \mathbb{V}$ tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para cualquier $v \in \mathbb{V}$ (existencia del vector cero),
 - 3) Para todo $v \in \mathbb{V}$ existe un elemento $-v \in \mathbb{V}$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (existencia del opuesto),
 - 4) $u + v = v + u$ para cualquier $u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad).
- II. *La multiplicación escalar satisface*
 - 1) $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$ para cualquier $a, b \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbb{V}$ (asociatividad),
 - 2) $1 \cdot v = v$ para cualquier $v \in \mathbb{V}$ (identidad multiplicativa).
- III. *La suma vectorial y la multiplicación escalar están relacionadas entre sí mediante las leyes distributivas:*
 - 1) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ para cualquier $a \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathbb{V}$,
 - 2) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ para cualquier $a, b \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbb{V}$.

1.3. Ejemplos.

Ejemplo 1.8 (Los espacios \mathbb{K}^n). Sea $n \in \mathbb{N}$. Denotamos mediante \mathbb{K}^n el conjunto de todas las matrices de $n \times 1$ con coeficientes en \mathbb{K}

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si la suma vectorial $+$: $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ se define por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

y la multiplicación escalar $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ se define por

$$a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix},$$

entonces \mathbb{K}^n es un \mathbb{K} -espacio vectorial. \square

Ejemplo 1.9 (Los espacios de matrices $\mathbb{K}^{m \times n}$). Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Denotamos mediante $\mathbb{K}^{m \times n}$ el conjunto de todas las matrices rectangulares de $m \times n$ sobre \mathbb{K}

$$\mathbb{K}^{m \times n} := \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : \{a_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K} \right\}.$$

Dependiendo del contexto, y a efectos de simplificar la escritura, denotaremos los coeficientes de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, mediante $A = [a_{ij}]$ o mediante $A = [A_{ij}]$, donde se sobreentiende que $i \in \mathbb{I}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ y que $j \in \mathbb{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

La suma de dos matrices A y B de $\mathbb{K}^{m \times n}$ definida por

$$[(A + B)_{ij}] := [A_{ij} + B_{ij}],$$

y el producto de un escalar $c \in \mathbb{K}$ por una matriz A de $\mathbb{K}^{m \times n}$ definido por

$$c[A_{ij}] := [cA_{ij}],$$

convierten al conjunto $\mathbb{K}^{m \times n}$ en un \mathbb{K} -espacio vectorial. \square

Ejemplo 1.10 (El espacio de los polinomios con coeficientes en \mathbb{K}). Sea $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes en \mathbb{K} . El conjunto $\mathbb{K}[x]$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por constantes es un \mathbb{K} -espacio vectorial. \square

 *Adaptando los argumentos y las técnicas desarrolladas en el siguiente ejemplo se puede resolver el **Ejercicio 1.1**.*

Ejemplo 1.11 (El espacio de las funciones de X en \mathbb{K}). Sea X un conjunto no vacío. Con \mathbb{K}^X denotaremos el conjunto de todas las funciones de X en \mathbb{K}

$$\mathbb{K}^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ es una función}\}.$$

Dos funciones $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ de \mathbb{K}^X son iguales si, y sólo si,

$$(1) \quad f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Definiendo la suma vectorial y la multiplicación escalar mediante *operaciones punto a punto* el conjunto \mathbb{K}^X se convierte en un \mathbb{K} -espacio vectorial.

Si f y g son dos funciones en \mathbb{K}^X , la suma $f + g$ se define como la suma de funciones punto a punto:

$$(2) \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Del mismo modo se define el producto de funciones por escalares. Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathbb{K}^X$, el producto de f por el escalar a , se define por

$$(3) \quad (a \cdot f)(x) := af(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

El vector cero de \mathbb{K}^X es la función $0_{\mathbb{K}^X} : X \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $0_{\mathbb{K}^X}(x) := 0$ para todo $x \in X$.

Demostración. Para demostrar que el conjunto \mathbb{K}^X , con la suma vectorial y la multiplicación escalar introducidas más arriba, es un \mathbb{K} -espacio vectorial tenemos que comprobar que dichas operaciones satisfacen las propiedades I, II, y III enunciadas en la **Definición 1.7** que caracteriza a los espacios vectoriales.

I. En primer lugar demostraremos que el par $(\mathbb{K}^X, +)$ es un grupo abeliano.

1) **Asociatividad.** Para verificar la propiedad asociativa de la suma vectorial tenemos que comprobar que $f + (g + h) = (f + g) + h$ para cualquier $f, g, h \in \mathbb{K}^X$. Lo que, de acuerdo con la definición de igualdad de funciones (1), significa que tenemos que comprobar que $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$ para todo $x \in X$.

Para cada $x \in X$ tenemos que


$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) && \text{por definición de } f + (g + h) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) && \text{por definición de } g + h \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) && \text{por definición de } f + g \\ &= ((f + g) + h)(x) && \text{por definición de } (f + g) + h, \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad utilizamos la propiedad asociativa de la suma en \mathbb{K} .

Como $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$ para todo $x \in X$, concluimos que

$$f + (g + h) = (f + g) + h.$$

Lo que comprueba la validez de la ley asociativa para la suma vectorial definida en (2).

 *Ya mostramos cómo verificar la propiedad asociativa de la suma. Como las otras propiedades se demuestran de manera similar, presentaremos el esquema completo de la prueba pero con menos detalles y comentarios. Es un trabajo largo y tedioso pero, como veremos a continuación, no es difícil.*

2) **Existencia del vector cero.** El vector cero de \mathbb{K}^X es la función $0_{\mathbb{K}^X} : X \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $0_{\mathbb{K}^X}(x) := 0$ para todo $x \in X$. En efecto, para cualquier $f \in \mathbb{K}^X$ y para todo $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} (f + 0_{\mathbb{K}^X})(x) &= f(x) + 0_{\mathbb{K}^X}(x) = f(x) + 0 = f(x), \\ (0_{\mathbb{K}^X} + f)(x) &= 0_{\mathbb{K}^X}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Se concluye que $f + 0_{\mathbb{K}^X} = f$ y $0_{\mathbb{K}^X} + f = f$.

3) **Existencia del opuesto.** Para cada $f \in \mathbb{K}^X$, el opuesto aditivo es la función $(-f) : X \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $(-f)(x) := -f(x)$ para todo $x \in X$. En efecto,

para todo $x \in X$ tenemos que

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0,$$

de donde se concluye que $f + (-f) = 0_{\mathbb{K}^X}$.

- 4) **Conmutatividad.** Utilizando la propiedad conmutativa de la suma de escalares, se puede ver que para cada $f, g \in \mathbb{K}^X$ y para todo $x \in X$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Concluimos que $f + g = g + f$.

II. En lo que sigue demostraremos que la multiplicación satisface la propiedades asociativa y de identidad multiplicativa:

- 1) **Asociatividad.** Para cada $f \in \mathbb{K}^X$ y para cada $a, b \in \mathbb{K}$ observamos que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} (a \cdot (b \cdot f))(x) &= a(b \cdot f)(x) \\ &= a(bf(x)) \\ &= (ab)f(x) \\ &= ((ab) \cdot f)(x) \end{aligned}$$

y obtenemos que $a \cdot (b \cdot f) = (ab) \cdot f$.

- 2) **Identidad multiplicativa.** Para cada $f \in \mathbb{K}^X$ tenemos que $1 \cdot f = f$ porque para todo $x \in X$ se tiene que

$$(1 \cdot f)(x) = 1f(x) = f(x).$$

III. Finalmente demostramos que la suma vectorial y la multiplicación escalar están relacionadas entre sí mediante las **leyes distributivas**:


1)

$$\begin{aligned} (a \cdot (f + g))(x) &= a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) \\ &= (a \cdot f + a \cdot g)(x). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} ((a + b) \cdot f)(x) &= (a + b)f(x) \\ &= af(x) + bf(x) \\ &= (a \cdot f + b \cdot f)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathbb{K}^X con las operaciones introducidas en (2) y (3) es un \mathbb{K} -espacio vectorial. \square

 *Nótese que en cada una de las cadenas de igualdades desarrolladas más arriba hay eslabones de distinta naturaleza. En todos los casos, el primero y el último corresponden a la definición de las operaciones que se están examinando (la suma vectorial y/o la multiplicación escalar), pero hay otros eslabones de naturaleza completamente distinta que involucran propiedades de la suma y el producto definidos en el cuerpo de escalares \mathbb{K} . Esas diferencias cualitativas están oscurecidas por razones que tienen que ver con la escritura y el abuso de notación para no recargar la misma.*


De acuerdo con el contexto el símbolo $+$, que se utiliza para representar la suma, está designando indistintamente la suma de vectores o a la suma de escalares. Por ejemplo, en la cadena de igualdades $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (f+g)(x)$, el primer y el último símbolo $+$ representa la suma en \mathbb{K}^X , mientras que el segundo y el tercero representa la suma en \mathbb{K} . Este problema se podía haber evitado mediante el siguiente recurso técnico: en lugar de utilizar un único símbolo $+$ para representar dos operaciones de naturaleza diferente, se podrían usar dos símbolos diferentes, por ejemplo, $+\mathbb{K}^X$ para representar la suma en \mathbb{K}^X y $+\mathbb{K}$ para representar la suma en \mathbb{K} . Adoptando esa nomenclatura podríamos haber escrito $(f+\mathbb{K}^X g)(x) = f(x)+\mathbb{K} g(x) = g(x)+\mathbb{K} f(x) = (g+\mathbb{K}^X f)(x)$. Esta forma de escribir, que destaca el contexto al costo de recargar la notación, pone de manifiesto que en la segunda igualdad se utilizó la propiedad conmutativa de la suma en \mathbb{K} .

Nota Bene. En la mayoría de los casos concretos en la prueba de que $(\mathbb{V}, +)$ es un grupo abeliano se utiliza el hecho de que $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.

1.4. Propiedades elementales.

Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. A partir de la definición axiomática se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- *Ley de cancelación para la suma vectorial.* Sean $v, w, u \in \mathbb{V}$. Si $v+u = w+u$, entonces $v = w$.
- *Unicidad del vector cero.* El vector $0 \in \mathbb{V}$ descrito en la propiedad I.2 es único. Con esto queremos decir que si un elemento u de \mathbb{V} satisface $v+u = u+v = v$ para cualquier $v \in \mathbb{V}$, entonces $u = 0$.
- *Unicidad del vector opuesto.* Dado $v \in \mathbb{V}$, el vector $-v$ descrito en la propiedad I.3 es único. Con esto queremos decir que si un elemento w de \mathbb{V} satisface $v+w = w+v = 0$, entonces $w = -v$.
- *El vector cero y la multiplicación escalar.*
 - $0 \cdot v = 0_{\mathbb{V}}$ para cualquier $v \in \mathbb{V}$.
 - $a \cdot 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$ para cualquier $a \in \mathbb{K}$.
 - Si $a \cdot v = 0_{\mathbb{V}}$, entonces $a = 0$ o $v = 0_{\mathbb{V}}$.
- *Leyes de cancelación para la multiplicación escalar.*
 - Sean $u, v \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si $au = av$, entonces $u = v$.
 - Sea $v \neq 0_{\mathbb{V}}$. Si $av = bv$, entonces $a = b$.
- *El vector opuesto y la multiplicación por -1 .* Para cada $v \in \mathbb{V}$ se verifica que $(-1) \cdot v = -v$.

 Para ponerse a prueba se puede intentar con el siguiente ejercicio: dados $v, w \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, demostrar que existe un único $x \in \mathbb{V}$ tal que $a \cdot x + v = w$.

1.5. Subespacios.

Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . Cuando $v, w \in \mathbb{S}$, también se tiene que $v, w \in \mathbb{V}$ y, por lo tanto, la suma $v+w$ está bien definida. Por las mismas razones, cuando $a \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{S}$, la multiplicación escalar av también está bien definida. Tiene sentido considerar la pregunta de si \mathbb{S} con

las operaciones definidas en \mathbb{V} es en sí mismo un \mathbb{K} -espacio vectorial. Cuando esto ocurre, se dice que \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} .

Definición 1.12 (Subespacios). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . \mathbb{S} se llama un subespacio de \mathbb{V} si \mathbb{S} es un \mathbb{K} -espacio vectorial con la suma vectorial y la multiplicación escalar definidas en \mathbb{V} restringidas a \mathbb{S} .

Nota Bene. De acuerdo con la **Definición 1.12**, para verificar que un subconjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio tendríamos que comprobar que

- A. \mathbb{S} es un conjunto no vacío.
- B. La suma vectorial definida en \mathbb{V} es una ley de composición interna en \mathbb{S} . Esto es: el resultado la suma vectorial de cualesquiera dos elementos de \mathbb{S} también es un elemento de \mathbb{S} .
- C. La multiplicación escalar definida en \mathbb{V} es una ley de composición externa en \mathbb{S} . Esto es: el resultado del producto de cualquier elemento de \mathbb{S} por cualquier escalar a también es un elemento de \mathbb{S} .
- D. La suma vectorial y la multiplicación escalar restringidas a \mathbb{S} satisfacen las propiedades I, II, y III enunciadas en la **Definición 1.7** que caracteriza a los espacios vectoriales.

Sin embargo, el siguiente resultado proporciona un método más eficiente para verificar si un subconjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

1.6. El Lema de 3x8.

Lema 1.13. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea \mathbb{S} un subconjunto de \mathbb{V} . Entonces \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} si, y sólo si, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) \mathbb{S} es no vacío.
- ii) \mathbb{S} es cerrado respecto a la suma vectorial: si $v, w \in \mathbb{S}$, entonces $v + w \in \mathbb{S}$.
- iii) \mathbb{S} es cerrado respecto a la multiplicación escalar: si $a \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{S}$, entonces $av \in \mathbb{S}$.

Demostración. La demostración se divide en dos partes:

- la PARTE “SÓLO SI” (condiciones necesarias) que consiste en suponer que \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} y deducir, bajo esa hipótesis, que \mathbb{S} satisface las propiedades i), ii) y iii) enunciadas más arriba; y
- la PARTE “SI” (condiciones suficientes) que consiste en suponer que \mathbb{S} satisface las propiedades i), ii), y iii) y deducir, a partir de dichas premisas, que \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} .

PARTE “SÓLO SI”. Suponemos que \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} . Por definición, \mathbb{S} es un \mathbb{K} -espacio vectorial con la suma vectorial y la multiplicación escalar restringidas a \mathbb{S} . En particular, se satisfacen las propiedades i), ii) y iii) directamente por la definición de \mathbb{K} -espacio vectorial. Esto prueba la parte “sólo si”.


PARTE “SI”. Esta es la parte de la demostración que requiere más trabajo. Suponemos que $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subconjunto no vacío que es cerrado respecto a la suma y la multiplicación escalar. Tenemos que demostrar que \mathbb{S} es un \mathbb{K} -espacio

vectorial. Vale decir, tenemos que verificar que se satisfacen las propiedades I, II y III que caracterizan a los espacios vectoriales.

La mayoría de estas propiedades se satisfacen inmediatamente porque \mathbb{S} es un subconjunto de \mathbb{V} y \mathbb{V} ya las satisface. Por ejemplo, dado que los vectores u, v, w de \mathbb{V} satisfacen la propiedad asociativa $u + (v + w) = (u + v) + w$, se deduce automáticamente que los vectores de \mathbb{S} también satisfacen la mencionada propiedad, porque todos los vectores de \mathbb{S} también son vectores de \mathbb{V} . Este tipo de argumento permite verificar inmediatamente todas las propiedades I, II, y III excepto las propiedades I. 2) y I. 3): el vector cero $0 \in \mathbb{V}$ podría no estar en \mathbb{S} y lo mismo podría ocurrir con los opuestos de los elementos de \mathbb{S} . Pero ninguno de esos problemas pueden ocurrir. Veamos por qué.

- $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S}$. En efecto, debido a que \mathbb{S} es un conjunto no vacío, existe al menos un elemento $u \in \mathbb{S}$, y como \mathbb{S} es cerrado respecto a la multiplicación escalar, $0 \cdot u \in \mathbb{S}$, pero $0 \cdot u = 0_{\mathbb{V}}$. Esto prueba que \mathbb{S} satisface la propiedad I. 2) sobre la pertenencia del vector cero al conjunto \mathbb{S} .

De la misma manera se comprueba que si $v \in \mathbb{S}$, entonces $-v \in \mathbb{S}$, porque $(-1) \cdot v = -v$. Lo que culmina la prueba de la parte “solo si”. \square

 Para verificar que un subconjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de \mathbb{V} , solo se necesita verificar que $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S}$ y que \mathbb{S} es cerrado respecto a la suma vectorial y la multiplicación escalar. Comparar con el **Ejercicio 1.2**.

2. COMBINACIONES LINEALES

2.1. Definición.

Definición 2.1. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores de \mathbb{V} . Una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n es una expresión de la forma

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n a_j v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

donde $a_j \in \mathbb{K}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\} =: \mathbb{I}_n$. Los escalares a_j se llaman los coeficientes de la combinación lineal. Una combinación lineal es trivial si todos sus coeficientes a_j son nulos. En otro caso, es no trivial.

En general, dado un subconjunto no vacío \mathcal{G} de \mathbb{V} , una combinación lineal de elementos de \mathcal{G} es una expresión de la forma

$$(5) \quad \sum_{v \in \mathcal{F}} a_v v,$$

donde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ es cualquier subconjunto finito de \mathcal{G} y $a_v \in \mathbb{K}$ para cada $v \in \mathcal{F}$. Una combinación lineal no trivial de elementos de \mathcal{G} es una combinación lineal en la que al menos uno de los coeficientes a_v es no nulo.

Nota Bene 1. En la **Definición 2.1** utilizamos la notación $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ para indicar que \mathcal{F} es un subconjunto finito de \mathcal{G} . En tal caso, la cantidad de elementos de \mathcal{F} será algún número natural n . En consecuencia, el conjunto \mathcal{F} se puede describir enumerando sus elementos, resultando que $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ para algunos $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{G}$. Luego, una *combinación lineal de elementos de \mathcal{G}* será una expresión de la forma $\sum_{j=1}^n a_j v_j$, donde $n \in \mathbb{N}$, v_1, \dots, v_n son elementos distintos de \mathcal{G} y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Nota Bene 2. Sea \mathcal{G} un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . El vector nulo es una combinación lineal de elementos de \mathcal{G} porque

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n,$$

cualesquiera sean los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{G}$.

2.2. Ecuaciones y capsulas lineales.

Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. Una *ecuación lineal* es una ecuación de la forma

$$(6) \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = v,$$

donde v_1, v_2, \dots, v_n y v representan vectores de \mathbb{V} y x_1, x_2, \dots, x_n son signos indeterminados que pueden reemplazarse (o especializarse) por elementos a_1, a_2, \dots, a_n de \mathbb{K} . Cuando al especializar x_1, x_2, \dots, x_n por elementos a_1, a_2, \dots, a_n de \mathbb{K} en la ecuación (6) se obtiene una expresión verdadera, decimos que a_1, a_2, \dots, a_n es *solución* de la misma. Por ejemplo, la ecuación

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

posee siempre una solución, la solución trivial, $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.

Nota Bene. Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbb{V} , la ecuación (6) posee solución si, y sólo si, $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, para algunos $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. La colección de todos estos vectores juega un papel muy importante y merece una definición formal.

Definición 2.2. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de \mathbb{V} . El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de \mathcal{G} , que denotaremos por $\text{gen}(\mathcal{G})$, se denomina la *capsula lineal* del conjunto \mathcal{G} :

$$\text{gen}(\mathcal{G}) := \left\{ \sum_{j=1}^n a_j v_j : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Proposición 2.3. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de \mathbb{V} . Entonces $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

Demostración.

- $0_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ porque $0_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$.
- $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es cerrado respecto a la suma vectorial porque

$$\sum_{j=1}^n a_j v_j + \sum_{j=1}^n b_j v_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) v_j.$$

- $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es cerrado respecto a la multiplicación escalar porque

$$b \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n (ba_j) v_j.$$

□

Nomenclatura. En vista del resultado anterior, la capsula lineal de cualquier conjunto no vacío y finito de vectores $\mathcal{G} \subset \mathbb{V}$ se suele llamar el *subespacio generado por* \mathcal{G} .

Nota Bene. Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbb{V} , la ecuación

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = v,$$

tiene solución si, y sólo si, $v \in \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

2.3. Subespacios generados por sistemas de vectores.

Notación. Si I es un conjunto no vacío, usamos el símbolo $J \Subset I$ para representar que J es un subconjunto no vacío y finito de I .

Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $\mathcal{G} = \{v_i : i \in I\} \subset \mathbb{V}$ un subconjunto no vacío e indexado por un conjunto de índices I . El conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\sum_{j \in J} \alpha_j v_j,$$

donde $J \Subset I$ y $a_j \in \mathbb{K}$ para todo $j \in J$, constituye un subespacio de \mathbb{V} , que denominamos *el subespacio de \mathbb{V} generado por \mathcal{G}* y denotamos indifertemente por $\text{gen}(\mathcal{G})$ o $\text{gen}\{v_i : i \in I\}$:

$$\text{gen}\{v_i : i \in I\} := \left\{ \sum_{j \in J} a_j v_j : J \Subset I \text{ y } a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in J \right\}.$$

No es difícil verificar que $\text{gen}\{v_i : i \in I\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

- $\text{gen}\{v_i : i \in I\}$ es no vacío porque $0_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_i : i \in I\}$.
- $\text{gen}\{v_i : i \in I\}$ es cerrado respecto a la suma vectorial porque cualesquiera sean las familias de escalares $\{a_j : j \in J_1\}$ y $\{b_j : j \in J_2\}$ con $J_1, J_2 \Subset I$, se tiene que

$$\sum_{j \in J_1} a_j v_j + \sum_{j \in J_2} b_j v_j = \sum_{j \in J} c_j v_j,$$

donde $J = J_1 \cup J_2 \Subset I$ y

$$c_j = \begin{cases} a_j + b_j & \text{si } j \in J_1 \cap J_2 \\ a_j & \text{si } j \in J_1 \setminus J_2 \\ b_j & \text{si } j \in J_2 \setminus J_1 \end{cases} \in \mathbb{K} \quad \text{para todo } j \in J.$$

- $\text{gen}\{v_i : i \in I\}$ es cerrado respecto a la multiplicación escalar porque cualquiera sea la familia de escalares $\{\alpha_j : j \in J\}$ con $J \Subset I$, se tiene que

$$b \left(\sum_{j \in J} \alpha_j v_j \right) = \sum_{j \in J} (b\alpha_j) v_j.$$

□

Teorema 2.4. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea \mathcal{G} un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . Entonces, $\text{gen}(\mathcal{G})$ es el menor subespacio de \mathbb{V} que contiene a \mathcal{G} .

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.5. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. Sean \mathbb{S} un subespacio no nulo de \mathbb{V} y \mathcal{G} un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . Si $\mathbb{S} = \text{gen}(\mathcal{G})$, \mathcal{G} se llama un sistema de generadores de \mathbb{S} . Si, además, \mathcal{G} es un conjunto finito, \mathbb{S} se dice finitamente generado.

2.4. Ejemplos.

2.5. Sistemas de generadores minimales.

Lema 2.6 (Eliminación). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea \mathcal{G} un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . Si algún vector v de \mathcal{G} es combinación lineal de otros vectores v_1, \dots, v_n de \mathcal{G} , entonces $\text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{G})$

Demostración. Cualquier combinación lineal de v y otros vectores de \mathcal{G} distintos de v puede reescribirse como una combinación lineal de v_1, \dots, v_n y otros vectores de \mathcal{G} distintos de v . Por lo tanto, cualquier combinación lineal de elementos de \mathcal{G} puede escribirse como una combinación lineal de elementos de $\mathcal{G} \setminus \{v\}$. Consecuentemente $\text{gen}(\mathcal{G}) \subset \text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\})$, y como $\text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) \subset \text{gen}(\mathcal{G})$, se concluye que $\text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{G})$. □

Definición 2.7. Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, \mathbb{S} un subespacio no nulo de \mathbb{V} , y \mathcal{G} un subconjunto no vacío de \mathbb{V} . Se dice que \mathcal{G} es un sistema de generadores minimal de \mathbb{S} si $\mathbb{S} = \text{gen}(\mathcal{G})$ y $\text{gen}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathbb{S}$ para cualquier $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{G}$.

Lema 2.8. Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial no nulo finitamente generado. El siguiente “algoritmo” construye un sistema de generadores minimal de \mathbb{V} .

Algorithm 1 Construcción de un sistema de generadores minimal

Require: \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial no nulo finitamente generado.

Ensure: \mathcal{G} un sistema de generadores minimal de \mathbb{V} .

- 1: $\mathcal{G} \leftarrow \emptyset, \mathcal{X} \leftarrow \mathbb{V} \setminus \{0\}, n \leftarrow 0;$
 - 2: **while** $\mathcal{X} \neq \emptyset$ **do**
 - 3: $n \leftarrow n + 1;$
 - 4: Seleccionar $v_n \in \mathcal{X};$
 - 5: $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{v_n\};$
 - 6: $\mathcal{X} \leftarrow \mathbb{V} \setminus \text{gen}(\mathcal{G});$
 - 7: **end while**
 - 8: **return** \mathcal{G}
-

Demostración. Ejercicio. □