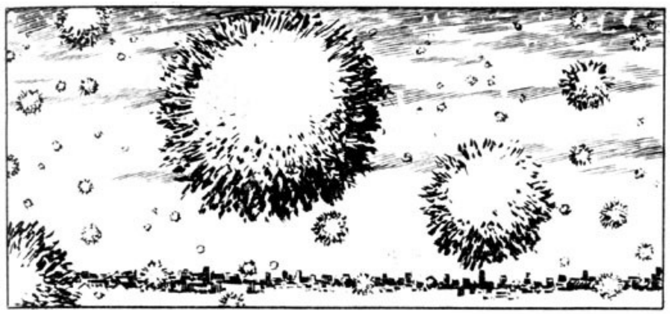
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 8 de septiembre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Independencia lineal

1.1. Definición.

Definición 1.1. *Un sistema de vectores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *se llama* linealmente independiente *si y solo si la ecuación lineal*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0, \tag{1}$$

con indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *a valores en* $\mathbb{K}$*, tiene solución única.*

Nota Bene. Nótese que, cualesquiera sea el sistema de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la ecuación (1) siempre admite como solución a *la solución trivial*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Decir que *el sistema de vectores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *es linealmente independiente* significa que la veracidad de la relación $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ solo es posible cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. En otras palabras, el sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente cuando la proposición

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

es verdadera.

Ejemplo 1.2 (Polinomios)**.**

- El sistema de polinomios
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbb{R}[x]$$
es linealmente independiente porque la ecuación
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$
con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, implica que
$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$
- *Taylor centrado en* x_0. El sistema de polinomios
$$\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \ldots, (x - x_0)^n\} \subset \mathbb{R}[x]$$
es linealmente independiente. Además, si $p \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Ejemplo 1.3 (Matrices)**.** Quienes resolvieron el inciso (**b**) del **Ejercicio 1.3** están en condiciones de reconocer que el sistema de matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

no es linealmente independiente. ¿Por qué? Porque en ese inciso se propone hallar un sistema de generadores del subespacio

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Se hacen las cuentas y se concluye que las soluciones de la ecuación

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \xi \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T,$$

con $\xi \in \mathbb{R}$. Como la ecuación (2) admite infinitas soluciones, el sistema de matrices considerado no es linealmente independiente. La existencia de soluciones no triviales de la ecuación (2) permite caracterizar relaciones de dependencia lineal entre esas tres matrices. Esto es así porque puede observarse, por ejemplo, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y de allí se concluye que cada una de esas matrices se puede expresar como una combinación lineal de las otras dos. Concretamente:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nota Bene. Decir que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un sistema linealmente independiente equivale a decir que

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0_{\mathbb{V}} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

1.2. Sistemas de generadores minimales.

Lema 1.4 (Minimalidad e independencia lineal)**.** *Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{S}$ un subespacio no nulo de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{G} \subset \mathbb{V}$ un sistema minimal de generadores de $\mathbb{S}$. Entonces $\mathcal{G}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Si no lo fuese, por definición de independencia lineal, deben existir $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{G}$, distintos dos a dos, y escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Como sabemos que al menos uno de los escalares a_i es no nulo; no perdemos generalidad si suponemos que $a_1 \neq 0$ (porque si fuese de otra manera podemos permutar el vector v_i para ubicar el coeficiente no nulo al principio de la suma). Ahora podemos despejar v_1:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n.$$

Como $v_1 \in \mathcal{G}$ y v_1 es combinación lineal de otros vectores de $\mathcal{G}$, el **Lema de eliminación** nos permite concluir que $\operatorname{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v_1\}) = \operatorname{gen}(\mathcal{G})$. Lo que contradice la propiedad de minimalidad del sistema de generadores $\mathcal{G}$. □

: Comparar con el **Ejercicio 1.7.** *y adaptar el argumento a la Miniatura. La recíproca se prueba usando una técnica similar.*

1.3. Herramienta.

Consideramos un sistema de vectores $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linealmente independiente y consideramos otro sistema de vectores $\mathcal{H} = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \subset \operatorname{gen}(\mathcal{G})$. Decir que $\mathcal{H}$ es linealmente independiente equivale a decir que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Como para cada $j \in \mathbb{I}_n$ tenemos que $w_j \in \operatorname{gen}(\mathcal{G})$, existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tales que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

De aquí que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i$$

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = 0 \iff \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

De (3) y (4) se concluye que decir que $\mathcal{H}$ es linealmente independiente equivale a decir que el sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

es compatible determinado. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es linealmente independiente si y solamente si

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0.$$

$\square$

: *Comparar con el* **Ejercicio 1.8.**

Ejemplo 1.5. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$ y se definen w_1, w_2, w_3 mediante

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 + 3v_2 - 2v_3, \\ w_2 &:= -3v_1 - 5v_2 + 6v_3, \\ w_3 &:= 5v_2 - 6v_3. \end{aligned}$$

Para saber si el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente tenemos que estudiar las soluciones de la ecuación $x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0$. Primero observamos que

$$\begin{aligned} x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 &= x_1(v_1 + 3v_2 - 2v_3) + x_2(-3v_1 - 5v_2 + 6v_3) + x_3(5v_2 - 6v_3) \\ &= (x_1 - 3x_2)v_1 + (3x_1 - 5x_2 + 5x_3)v_2 + (-2x_1 + 6x_2 - 6x_3)v_3. \end{aligned}$$

Como los vectores v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0 &\iff \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 5 \\ -2 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 5 \\ -2 & 6 & -6 \end{bmatrix} = -24,$$

el sistema lineal homogéneo de más arriba es compatible determinado y en consecuencia vale que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por lo tanto, $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto linealmente independiente. $\square$

: *Es hora de resolver el* **Ejercicio 1.9.**

1.4. Wronskiano.

Se considera un sistema de funciones $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset C^{n-1}(I)$, donde I es un intervalo de la recta real y $n \geq 2$. El *wronskiano de* $\mathcal{F}$, $W(\mathcal{F}) : I \to \mathbb{R}$, se define por

$$W(\mathcal{F})(x) := \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Lema 1.6. *Si* $W(\mathcal{F})(x_0) \neq 0$ *para algún* $x_0 \in I$, *entonces* $\mathcal{F}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Por definición, el sistema $\mathcal{F}$ es linealmente independiente si la única combinación lineal que verifica la idéntidad

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j = 0, \tag{6}$$

es la combinación lineal trivial, *i.e.*, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Nótese que (6) es equivalente a decir que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x) = 0, \ \text{ para todo } \ x \in I. \tag{7}$$

Derivando sucesivamente ambos miembros de la igualdad (7) obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_j'(x) = 0, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_j f_j^{(n-1)}(x) = 0, \ \text{ para todo } \ x \in I.$$

Tenemos así que

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \text{ para todo } \ x \in I.$$

En particular, para $x = x_0$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

Como el determinante de la matriz de $n \times n$ que aparece en el lado derecho de la igualdad es $W(\mathcal{F})(x_0)$, y estamos suponiendo que $W(\mathcal{F})(x_0) \neq 0$, dicha matriz es inversible y por lo tanto el sistema lineal homogéneo (8) es compatible determinado y su solución es $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$. Esto prueba que el sistema $\mathcal{F}$ es linealmente independiente. □

: *Este resultado es útil para resolver el inciso* (**a**) *del* **Ejercicio 1.11.**.

Ejemplo 1.7. El sistema de funciones $\mathcal{F} = \left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ es linealmente independiente. En efecto,

$$W(\mathcal{F})(x) = \det \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} = e^{6x} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = 2e^{6x} \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

Ejemplo 1.8. El sistema de funciones

$$\mathcal{F} = \left\{e^x + 3e^{2x} - 2e^{3x}, -3e^x - 5e^{2x} + 6e^{3x}, 5e^{2x} - 6e^{3x}\right\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$$

es linealmente independiente. Ahora esto es inmediato por aplicación del resultado obtenido en el **Ejemplo 1.5** al conjunto $\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$. □

: *A no dudarlo, le llegó la hora al* **Ejercicio 1.11.**

1.5. De yapa.

Ejemplo 1.9. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema

$$\mathcal{F}_a = \left\{x^2 + 2x^3, 1 + 2ax + x^2 + 2x^3, 2 + ax + 4x^2 + 8x^3\right\} \subset \mathbb{R}_3[x]$$

es linealmente independiente. Esta vez recurrimos directamente a la definición de independencia lineal. Observamos que

$$\xi_1(x^2 + 2x^3) + \xi_2(1 + 2ax + x^2 + 2x^3) + \xi_3(2 + ax + 4x^2 + 8x^3) = 0,$$

si y solamente si

$$(\xi_2 + 2\xi_3)1 + (2a\xi_2 + a\xi_3)x + (\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3)x^2 + (2\xi_1 + 2\xi_2 + 8\xi_3)x^3 = 0,$$

o lo que es equivalente

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \\ 2a\xi_2 + a\xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + 2\xi_2 + 8\xi_3 = 0 \end{array}\right. \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2a & a \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pasamos la matriz del sistema por la máquina de escalonar de Gauss-Jordan, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2a & a \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y concluimos que el sistema es compatible determinado cuando y solo cuando $a \neq 0$. Por lo tanto, el sistema $\mathcal{F}_a$ es linealmente independiente para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

: *Hay muchas maneras de pelar el gato, nene ... Directo al* **Ejercicio 1.12.** *o te fusila la Cruz Roja.*