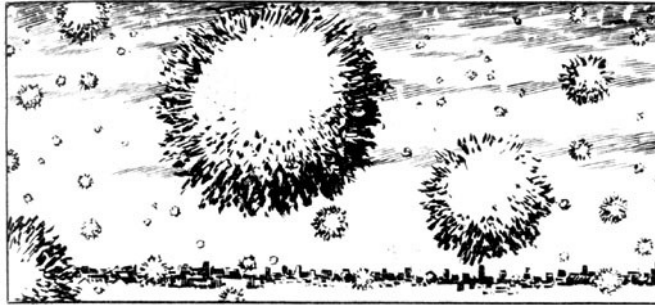


---

Álgebra II (Curso 23)  
Segundo cuatrimestre, 2021  
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:  
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 13 DE SEPTIEMBRE  
Sebastian GRYNBERG

---



*El único héroe válido es el héroe "en grupo",  
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Sistemas de vectores (las dos caras de Jano)	2
1.1. Sistemas de generadores minimales	2
1.2. Sistemas linealmente independientes maximales	2
1.3. Bases	3
2. Bases en espacios vectoriales finitamente generados	3
2.1. Lema de sustitución de Steinitz	4
2.2. Bases de espacios vectoriales finitamente generados	6
2.3. Espacios vectoriales finito dimensionales	7
3. Técnicas	7
3.1. El método de eliminación de Gauss	7
3.2. Forma escalonada por filas	8
3.3. El método de eliminación de Gauss-Jordan	9
3.4. Forma escalonada por filas reducida	10

## 1. SISTEMAS DE VECTORES (LAS DOS CARAS DE JANO)

## 1.1. Sistemas de generadores minimales.

La semana pasada demostramos los siguientes resultados.

**Lema 1.1** (Eliminación). *Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sea  $\mathcal{G}$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{V}$ . Si algún vector  $v$  de  $\mathcal{G}$  es combinación lineal de otros vectores  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{G}$ , entonces*

$$\text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{G}).$$

**Lema 1.2** (Minimalidad e independencia lineal). *Sean  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial,  $\mathbb{S}$  un subespacio no nulo de  $\mathbb{V}$  y  $\mathcal{G} \subset \mathbb{V}$  un sistema minimal de generadores de  $\mathbb{S}$ . Entonces  $\mathcal{G}$  es un conjunto linealmente independiente.*

**Nota Bene.** Nótese que si  $\mathcal{L} \subset \mathbb{V}$  es un conjunto linealmente independiente que no genera  $\mathbb{V}$ , podemos agrandar el subespacio generado por  $\mathcal{L}$  agregando un vector  $v$  del complemento de  $\text{gen}(\mathcal{L})$ . Este procedimiento conserva la independencia lineal del sistema de generadores.

## 1.2. Sistemas linealmente independientes maximales.

**Lema 1.3.** *Sean  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $\mathcal{L} \subset \mathbb{V}$  un conjunto linealmente independiente. Consideramos un vector  $v \notin \mathcal{L}$ . Vale que*

(a) *Si  $v \in \text{gen}(\mathcal{L})$ , entonces  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente dependiente, y*

$$\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{L}).$$

(b) *Si  $v \notin \text{gen}(\mathcal{L})$ , entonces  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente independiente, y*

$$\text{gen}(\mathcal{L}) \subsetneq \text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\}).$$

*Demostración.*

Parte (a). Si  $v \in \text{gen}(\mathcal{L})$ , entonces  $v$  es una combinación lineal de vectores de  $\mathcal{L}$ : existen vectores  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{L}$  y escalares  $a_1, \dots, a_n$  tales que

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

De ahí que

$$0 = (-1)v + a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

En palabras, 0 es una combinación lineal no trivial de los vectores  $v, v_1, \dots, v_n$  (no es trivial porque el coeficiente  $-1$  que multiplica a  $v$  no es cero. Importa tener en cuenta que dado que  $v \notin \mathcal{L}$ , este coeficiente  $-1$  no puede ser cancelado por ninguno de los  $v_i$ ). Por lo tanto,  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente dependiente.

Además, como  $v$  es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_n$ , cualquier combinación lineal de  $v$  y  $v_1, \dots, v_n$  se puede volver a expresar como una combinación lineal que solo involucra a los vectores  $v_1, \dots, v_n$ . Por lo tanto,  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\})$  no contiene ningún otro elemento adicional que ya no pertenezca a  $\text{gen}(\mathcal{L})$ . Por otro lado, cada elemento que pertenece a  $\text{gen}(\mathcal{L})$  también pertenece a  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\})$ . Se concluye que  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\})$  y  $\text{gen}(\mathcal{L})$  tienen exactamente los mismos elementos, es decir,  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{L})$ .

Parte (b). Ahora  $v \notin \text{gen}(\mathcal{L})$ . Está claro que  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\})$  contiene a  $\text{gen}(\mathcal{L})$ . También está claro que a  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\})$  le pertenece el vector  $v$  que, por otra parte, no pertenece a  $\text{gen}(\mathcal{L})$ . Así que  $\text{gen}(\mathcal{L} \cup \{v\}) \setminus \text{gen}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ .

Ahora vamos a demostrar que  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente independiente. Si no lo fuese, hay una manera no trivial de representar al vector 0 como una combinación lineal de  $v$  y algunos vectores  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{L}$ :

$$0 = av + a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

Si  $a = 0$ , estaríamos escribiendo al 0 como una combinación lineal no trivial de los vectores  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{L}$ , pero esto último contradice la hipótesis de que  $\mathcal{L}$  es linealmente independiente. Por lo tanto,  $a \neq 0$ . Pero entonces podemos despejar  $v$  y concluir que

$$v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_n}{a}v_n,$$

que dicho en palabras, significa que  $v$  es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_n$ . En consecuencia,  $v \in \text{gen}(\mathcal{L})$ , una contradicción con el punto de partida. Por lo tanto,  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente independiente.  $\square$

**Definición 1.4.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sea  $\mathcal{L}$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{V}$ . Se dice que  $\mathcal{L}$  es un sistema linealmente independiente maximal si  $\mathcal{L}$  es linealmente independiente y la relación  $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{M}$  implica que  $\mathcal{M}$  no es linealmente independiente.

**Lema 1.5.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sea  $\mathcal{L}$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{V}$ . Si  $\mathcal{L}$  es un sistema linealmente independiente maximal, entonces  $\mathbb{V} = \text{gen}(\mathcal{L})$ .

*Demostración.* Se deduce inmediatamente de la proposición (b) del **Lema 1.3**. Porque si  $\text{gen}(\mathcal{L}) \neq \mathbb{V}$ , existe un vector  $v \in \mathbb{V} \setminus \text{gen}(\mathcal{L})$ , y entonces  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente independiente, lo que contradice la maximalidad de  $\mathcal{L}$ .  $\square$

### 1.3. Bases.

**Definición 1.6.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Una base de  $\mathbb{V}$  es un sistema de generadores minimal de  $\mathbb{V}$ .

**Teorema 1.7** (Teorema de caracterización). Sea  $\mathcal{B}$  un conjunto de vectores de  $\mathbb{V}$ . Las siguientes propiedades son todas equivalentes entre sí:

1.  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente y genera  $\mathbb{V}$ .
2.  $\mathcal{B}$  es un sistema minimal de generadores de  $\mathbb{V}$ .
3.  $\mathcal{B}$  es un conjunto linealmente independiente maximal.
4. Cualquier vector  $v \in \mathbb{V}$  se puede descomponer de manera única como una combinación lineal de vectores  $\mathcal{B}$ .

## 2. BASES EN ESPACIOS VECTORIALES FINITAMENTE GENERADOS

**Definición 2.1.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial no nulo. Se dice que  $\mathbb{V}$  es finitamente generado, si existe un subconjunto finito  $\mathcal{G} \subset \mathbb{V}$  tal que  $\mathbb{V} = \text{gen}(\mathcal{G})$ .

**Teorema 2.2** (Existencia de bases). Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial finitamente generado. Entonces  $\mathbb{V}$  posee una base.

*Demostración.* Vamos a demostrar este teorema razonando inductivamente sobre el número de elementos de un sistema de generadores  $\mathcal{G}$ . **La hipótesis inductiva es la siguiente:** *Si un espacio vectorial finitamente generado posee un sistema de generadores  $\mathcal{G}_n$  de  $n$  elementos, entonces posee una base.*

**Paso 1.** Si  $\mathbb{V} = \text{gen}\{v_1\}$ , donde  $v_1 \neq 0$ , entonces cualquier elemento no nulo de  $\mathbb{V}$  es una base de  $\mathbb{V}$ .

**Paso Inductivo.** Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial que tiene un sistema de generadores

$$\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\},$$

donde los vectores  $v_1, \dots, v_{n+1}$  son distintos dos a dos.

Si existe un índice  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , tal que  $v_i$  es combinación lineal de los restantes  $v_j$ , entonces, de acuerdo con el **Lema 1.1**,  $\mathcal{G}_n = \mathcal{G} \setminus \{v_i\}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . **La hipótesis inductiva** permite concluir que  $\mathbb{V}$  posee una base. Podemos suponer entonces que ningún  $v_i$  es combinación lineal de los restantes  $v_j$ . Esto implica que  $\mathcal{G}$  es una base.

En efecto, como  $\mathcal{G}$  es un sistema de generadores, basta con demostrar que  $\mathcal{G}$  es un conjunto linealmente independiente. Lo probamos por definición

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1} = 0$$

Si algún escalar  $a_i \neq 0$ , como el orden de los vectores  $v_i$  es irrelevante, podemos suponer que  $a_{n+1} \neq 0$ . Pero entonces podemos despejar  $v_{n+1}$ :

$$v_{n+1} = -\frac{a_1}{a_{n+1}}v_1 - \dots - \frac{a_n}{a_{n+1}}v_n.$$

que contradice nuestra suposición que ningún  $v_i$  es combinación lineal de los restantes.  $\square$

## 2.1. Lema de sustitución de Steinitz.

**Teorema 2.3** (Lema de sustitución de Steinitz). *Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial finitamente generado. Sean  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{L}$  dos subconjuntos finitos de  $\mathbb{V}$  tales que  $\mathcal{G}$  es un sistema generador de  $\mathbb{V}$  y  $\mathcal{L}$  es linealmente independiente. Entonces  $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$  y existe un conjunto de vectores  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{G}$  que contiene  $|\mathcal{G}| - |\mathcal{L}|$  elementos tal que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  también es un sistema generador de  $\mathbb{V}$ .*

*Demostración.* Vamos a demostrar este teorema razonando inductivamente sobre el número de elementos del conjunto  $\mathcal{L}$ . **La hipótesis inductiva es la siguiente:** *Si un espacio vectorial finitamente generado posee un sistema de generadores  $\mathcal{G}$  de  $n$  elementos, y  $\mathcal{L}_m \subset \mathbb{V}$  es un conjunto linealmente independiente de  $m$  elementos, entonces  $m \leq n$  y existe un subconjunto  $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}$  de  $n-m$  elementos tal que  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ .*

**Paso 1.** Primero notamos que si  $m = 0$ , es evidente que  $m \leq n$ . Definiendo  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} := \mathcal{G}$ , tenemos que  $|\mathcal{G}_{\mathcal{L}}| = n - m$  y como  $\mathcal{L} = \emptyset$ , también tenemos que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{G}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ .

**Paso Inductivo.** Sea  $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\} \subset \mathbb{V}$  un conjunto linealmente independiente de  $m+1$  elementos distintos dos a dos. Como  $\mathcal{L}$  es linealmente independiente, el conjunto  $\mathcal{L}_m := \{v_1, \dots, v_m\}$  también es linealmente independiente

(porque  $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}$ ). **La hipótesis inductiva**, aplicada a  $\mathcal{L}_m$  permite concluir que  $m \leq n$  y que existe un subconjunto  $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}$  de  $n - m$  elementos tal que  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ .

Para probar que  $m + 1 \leq n$ , tenemos que descartar la posibilidad de que  $m = n$ . Lo hacemos de la siguiente manera. Consideramos el vector  $v_{m+1} \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_m$ . Como el conjunto  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ , podemos representar al vector  $v_{m+1}$  como una combinación lineal de vectores de  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$ . Si  $m = n$ , entonces  $\mathcal{G}_m = \emptyset$ , en consecuencia  $\mathcal{L}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$  y podemos escribir

$$(1) \quad v_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i v_i,$$

para algunos escalares  $a_1, \dots, a_m$ , lo que contradice nuestra suposición de que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \cup \{v_{m+1}\}$  es linealmente independiente porque

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i + (-1)v_{m+1} = 0.$$

Por lo tanto,  $m \neq n$ , y entonces  $n$  debe ser mayor o igual que  $m + 1$ .

Como  $n \geq m + 1$ , el conjunto  $\mathcal{G}_m \neq \emptyset$  y será de la forma  $\mathcal{G}_m = \{w_1, \dots, w_{n-m}\}$ , donde  $w_1, \dots, w_{n-m}$  son vectores de  $\mathcal{G}$ , distintos dos a dos. Como  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ , está claro que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_m$  también genera  $\mathbb{V}$ .

Para finalizar la demostración necesitamos eliminar alguno de los vectores  $w_k$  de  $\mathcal{G}_m$  para obtener un conjunto  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  de tamaño  $n - m - 1 = n - (m + 1)$  de manera tal que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  siga siendo un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ .

Veamos cómo hacerlo.

Como  $\mathcal{L}_m \cup \mathcal{G}_m$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$  podemos escribir

$$(2) \quad v_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i v_i + \sum_{k=1}^{n-m} b_k w_k,$$

para algunos escalares  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-m}$ .

Observamos que alguno de los escalares  $b_k$  con  $k \in \mathbb{I}_{n-m}$  debe ser no nulo, porque de otro modo, volvemos a la igualdad (1), que contradice la independencia lineal del conjunto  $\mathcal{L}$ . Como el orden de los vectores  $w_k$  es irrelevante, podemos suponer que  $b_1 \neq 0$ . Pero entonces podemos despejar  $w_1$ :

$$w_1 = \frac{1}{b_1} v_{m+1} + \sum_{i=1}^m \left( -\frac{a_i}{b_1} \right) v_i + \sum_{k=2}^{n-m} \left( -\frac{b_k}{b_1} \right) w_k.$$

Por lo tanto,  $w_1$  es una combinación lineal de vectores de  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ , donde  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} := \{w_2, \dots, w_{n-m}\}$ . De acuerdo con la afirmación (a) del **Lema 1.3**,

$$\text{gen}(\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) = \text{gen}(\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}} \cup \{w_1\})$$

Pero  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}} \cup \{w_1\}$  es exactamente  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_m$  que es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  genera  $\mathbb{V}$  y  $|\mathcal{G}_{\mathcal{L}}| - 1 = |\mathcal{G}_m| - 1 = n - m - 1 = n - (m + 1)$ .  $\square$

## 2.2. Bases de espacios vectoriales finitamente generados.

**Corolario 2.4.** *Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial finitamente generado y sea  $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{V}$  una base de  $\mathbb{V}$  tal que  $|\mathcal{B}_0| = n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ . Valen las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Cualquier conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathbb{V}$  que contenga menos de  $n$  elementos no puede ser un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . En otras palabras, todo sistema de generadores de  $\mathbb{V}$  debe contener al menos  $n$  elementos.*
- (b) *Cualquier conjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{V}$  que contenga más de  $n$  elementos no puede ser linealmente independiente. En otras palabras, todo conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{V}$  puede contener a lo sumo  $n$  elementos.*
- (c) *Cualquier base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{V}$  debe contener exactamente  $n$  elementos.*
- (d) *Cualquier sistema de generadores  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{V}$  con exactamente  $n$  elementos, es una base de  $\mathbb{V}$ .*
- (e) *Cualquier conjunto  $\mathcal{L}$  linealmente independiente con exactamente  $n$  elementos, es una base de  $\mathbb{V}$ .*
- (f) *Cualquier conjunto  $\mathcal{L}$  linealmente independiente está contenido en una base de  $\mathbb{V}$ .*
- (g) *Todo sistema de generadores  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{V}$  contiene una base de  $\mathbb{V}$ .*

*Demostración.*

- (a) Sea  $\mathcal{F} \subset \mathbb{V}$  tal que  $|\mathcal{F}| < n$ . Razonamos por el absurdo y suponemos que  $\mathcal{F}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . Puesto que  $\mathcal{B}_0$  es linealmente independiente, podemos aplicar el **Lema de sustitución de Steinitz** (con  $\mathcal{F}$  jugando el papel de  $\mathcal{G}$  y con  $\mathcal{B}_0$  jugando el papel de  $\mathcal{L}$ ) para concluir que  $n \leq |\mathcal{F}|$  lo que constituye una contradicción. Por lo tanto  $\mathcal{F}$  no puede generar  $\mathbb{V}$ .
- (b) Primero suponemos que  $\mathcal{M}$  es finito y tal que  $|\mathcal{M}| > n$ . Razonamos por el absurdo y suponemos que  $\mathcal{M}$  es linealmente independiente. Puesto que  $\mathcal{B}_0$  genera  $\mathbb{V}$ , podemos aplicar el **Lema de sustitución de Steinitz** (con  $\mathcal{B}_0$  jugando el papel de  $\mathcal{G}$  y con  $\mathcal{M}$  jugando el papel de  $\mathcal{L}$ ) para concluir que  $|\mathcal{M}| \leq n$  lo que constituye una contradicción. Lo que prueba (b) cuando  $\mathcal{M}$  es finito. Cuando  $\mathcal{M}$  es infinito, podemos hallar un subconjunto  $\tilde{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$  con  $n + 1$  elementos. Puesto que ya probamos (b) para subconjuntos finitos, sabemos que  $\tilde{\mathcal{M}}$  no puede ser linealmente independiente. Pero esto implica que  $\mathcal{M}$  tampoco puede ser linealmente independiente.
- (c) Sea  $\mathcal{B}$  cualquier base de  $\mathbb{V}$ . Puesto que  $\mathcal{B}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ , de (a) se deduce que  $|\mathcal{B}| \geq n$ . Puesto que  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente, de (b) se deduce que  $|\mathcal{B}| \leq n$ . Por lo tanto  $|\mathcal{B}| = n$ .
- (d) Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$  tal que  $|\mathcal{G}| = n$ . Para demostrar que  $\mathcal{G}$  es una base de  $\mathbb{V}$ , necesitamos probar que  $\mathcal{G}$  es linealmente independiente. Razonamos por el absurdo y suponemos que  $\mathcal{G}$  no es linealmente independiente. Entonces, por el **Lema 1.1**, existe un vector  $v \in \mathcal{G}$  tal que  $\text{gen}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{gen}(\mathcal{G})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{G} \setminus \{v\}$  también es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ , pero tiene menos de  $n$  elementos, lo que contradice (a). Por lo tanto,  $\mathcal{G}$  debe ser linealmente independiente.
- (e) Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto linealmente independiente tal que  $|\mathcal{L}| = n$ . Para demostrar que  $\mathcal{L}$  es una base de  $\mathbb{V}$ , necesitamos probar que  $\mathcal{L}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . Razonamos por el absurdo y suponemos que  $\mathcal{L}$  no es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ , en consecuencia existe un vector  $v \in \mathbb{V}$  tal

- que  $v \notin \text{gen}(\mathcal{L})$ . Entonces, por la afirmación (b) del **Lema 1.3**,  $\mathcal{L} \cup \{v\}$  es linealmente independiente. Pero este conjunto tiene mas de  $n$  elementos, lo que contradice (b). Por lo tanto,  $\mathcal{L}$  debe ser un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ .
- (f) Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto linealmente independiente; por (a), sabemos que  $|\mathcal{L}| \leq n$ . Aplicando el **Lema de sustitución de Steinitz** (con  $\mathcal{B}_0$  jugando el papel de  $\mathcal{G}$ ), podemos ver que existe algún subconjunto  $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  de  $\mathcal{B}_0$  tal que  $|\mathcal{G}_{\mathcal{L}}| = n - |\mathcal{L}|$  y  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . Entonces, por (a),  $|\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}| \geq n$ , y puesto que

$$|\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}| \leq |\mathcal{L}| + |\mathcal{G}_{\mathcal{L}}| = |\mathcal{L}| + n - |\mathcal{L}| = n,$$

se obtiene que  $|\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}| = n$ . Pero entonces, por (d),  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$  tiene que ser una base de  $\mathbb{V}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L}$  está contenido en una base de  $\mathbb{V}$ .

- (g) Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . De acuerdo con (a) para construir una base de  $\mathbb{V}$  dentro de  $\mathcal{G}$  necesitamos encontrar  $n$  vectores linealmente independientes de  $\mathcal{G}$ . Razonamos por el absurdo y suponemos que sólo podemos encontrar  $k$  vectores linealmente independientes de  $\mathcal{G}$  para algún  $k < n$ . Sea  $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathcal{G}$  un tal conjunto linealmente independiente. Entonces cualquier otro vector  $v \in \mathcal{G}$  debe ser una combinación lineal de los elementos de  $\mathcal{L}$ , porque de lo contrario podríamos agregar  $v$  a  $\mathcal{L}$  y obtener un conjunto más grande de vectores linealmente independiente de  $\mathcal{G}$ . Pero si cualquier vector de  $\mathcal{G}$  es una combinación lineal de elementos de  $\mathcal{L}$ , entonces  $\mathcal{L}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{V}$ . Por (a), esto implica que  $k \geq n$ , una contradicción. Por lo tanto, deben existir  $n$  vectores linealmente independientes en  $\mathcal{G}$ , y en consecuencia  $\mathcal{G}$  contiene una base.

□

### 2.3. Espacios vectoriales finito dimensionales.

En la sección anterior demostramos que todo  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathbb{V}$  finitamente generado posee una base y que todas las bases de  $\mathbb{V}$  poseen la misma cantidad de elementos.

**Definición 2.5** (Dimensión). *Sea  $\mathbb{V}$  un  $\mathbb{K}$  espacio vectorial finitamente generado. La cantidad de elementos de cualquier base de  $\mathbb{V}$  se denomina la dimensión de  $\mathbb{V}$ , y se denota por  $\dim(\mathbb{V})$ . Decimos que  $\mathbb{V}$  es finito dimensional, o también que  $\mathbb{V}$  es de dimensión finita, si su dimensión es  $n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .*

## 3. TÉCNICAS

### 3.1. El método de eliminación de Gauss.

Lo presuponemos conocido en el CBC. Aquí solamente presentaremos un ejemplo para ponernos a punto.

**Ejemplo 3.1.**

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

En el  $i$ -ésimo paso se procede de la siguiente forma

- Nos movemos de izquierda a derecha en la matriz, digamos  $U$ , hasta encontrar la primer columna que contenga un coeficiente no nulo en o debajo de la  $i$ -ésima posición, digamos que es  $U_{*j}$ .
- La posición del pivote para el  $i$ -ésimo paso es la posición  $(i, j)$ .
- De ser necesario, intercambiamos la  $i$ -ésima fila con una fila inferior para traer un número no nulo a la posición pivotal  $(i, j)$  y luego eliminamos todos los coeficientes por debajo de este pivote.
- Cuando la fila  $U_{i*}$  y todas las filas de  $U$  por debajo de  $U_{i*}$  están compuestas de ceros el proceso de eliminación está realizado.

**Nota Bene.** Nótese que el resultado final de la eliminación gaussiana no es una forma puramente triangular, sino más bien un forma triangular escalonada. A partir de ahora diremos que una matriz que muestra esa estructura es de la *forma escalonada por filas*.

**3.2. Forma escalonada por filas.**

Informalmente, una matriz  $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$  es de la *forma escalonada por filas* cuando sus coeficientes no nulos están ubicados en o por encima de una escalera que comienza en la esquina superior izquierda y que se inclina hacia abajo y hacia la derecha. La estructura típica de una matriz escalonada por filas se ilustra en la siguiente figura:

(*)	*	*	*	*	*	*	*
0	(*)	*	*	*	*	*	*
0	0	0	(*)	*	*	*	*
0	0	0	0	0	0	(*)	*
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURA 1. Los coeficientes no nulos están ilustrados con asteriscos y los pivotes de la matriz con asteriscos encerrados en círculos.

La definición formal es como sigue.

**Definición 3.2.** Se dice que la matriz  $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$  es de la forma escalonada por filas si vale que

1. Si  $E_{i*} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , entonces  $E_{k*} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  para todo  $k > i$ .  
En palabras, si una fila es nula todas las filas por debajo de ella también lo son.
2. Si  $j_i := \min \{j \in \mathbb{I}_n : E_{ij} \neq 0\}$ , i.e., si el primer coeficiente no nulo de la fila  $E_{i*}$  se encuentra en la  $j_i$ -ésima posición, entonces todos los coeficientes de la matriz que se encuentran debajo de la  $i$ -ésima posición en las columnas  $E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*j_i}$  son nulos.

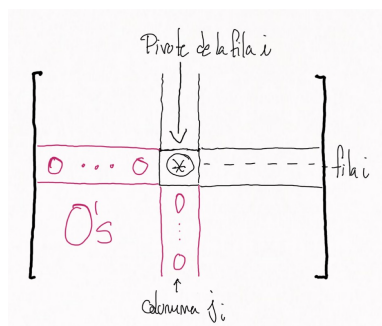


FIGURA 2. Posición pivotal.

**Nota Bene.** Debido a la flexibilidad de la elección de las operaciones por fila para reducir una matriz  $A$  a una forma escalonada por filas  $E$ , los coeficientes de la matriz  $E$  no están unívocamente determinados por  $A$ . Sin embargo, se puede probar que la *forma* de  $E$  es única en el sentido de que las posiciones pivotales de  $E$  están unívocamente determinadas por los coeficientes de  $A$ . Debido a que las posiciones pivotales son únicas, se deduce que la cantidad de pivotes está unívocamente determinada por  $A$ . Esta cantidad se denomina el *rango de  $A$* . Las columnas de  $A$  que contienen las posiciones pivotales de  $E$  se llaman *las columnas básicas de  $A$* .

### 3.3. El método de eliminación de Gauss-Jordan.

En cada paso del método de Gauss-Jordan se fuerza al pivote a ser un 1, hecho eso se eliminan todos los coeficientes por encima y por debajo de ese 1 pivotal. Cuando  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  representa los coeficientes de un sistema lineal compatible determinado, el resultado final de aplicar sobre  $A$  el método de Gauss-Jordan produce la matriz identidad.

**Ejemplo 3.3.**

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
& \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Nota Bene.** Al comparar los resultados del último ejemplo con los resultados del **Ejemplo 3.1** se observa que la *forma* de la matriz final es la misma, esto es así debido a la unicidad de la *forma* mencionada previamente. La única diferencia está en los valores numéricos de algunos de los coeficientes. Por su naturaleza, en el método de eliminación de Gauss-Jordan, cada pivote es 1 y todos los coeficientes por encima y por debajo de cada pivote son 0. La forma escalonada por filas producida por el método de Gauss-Jordan contiene la menor cantidad de coeficientes no nulos, motivo por el cual se la denomina *la forma escalonada por filas reducida*.

**3.4. Forma escalonada por filas reducida.**

**Definición 3.4.** Se dice que la matriz  $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$  es de la forma escalonada por filas reducida si vale que

1.  $E$  es de la forma escalonada por filas.
2. El primer coeficiente no nulo de cada fila (i.e., cada pivote) es 1.
3. Todos los coeficientes por encima de cada pivote son 0.

La estructura típica de una matriz escalonada por filas reducida se ilustra en la siguiente figura:

1	*	0	0	*	*	0	*
0	0	1	0	*	*	0	*
0	0	0	1	*	*	0	*
0	0	0	0	0	0	1	*
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURA 3. Los coeficientes marcados con asteriscos pueden ser nulos o no nulos.

**Notación.** Para cada  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , el símbolo  $E_A$  denotará la *única forma escalonada por filas reducida* que se obtiene de  $A$  mediante operaciones elementales por fila.

**Ejemplo 3.5.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar que

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí se deduce que el rango de  $A$  es 3 y que  $A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}$  son sus tres columnas básicas.

**Nota Bene.** El ejemplo anterior ilustra otra característica importante de  $E_A$  y explica por qué las columnas básicas son realmente *básicas*. *Cada columna no básica se puede expresar como una combinación de columnas básicas*. En el ejemplo, se puede ver que

$$A_{*2} = 2A_{*1} \quad \text{y} \quad A_{*4} = A_{*1} + A_{*3}.$$

Nótese también que el mismo conjunto de relaciones lineales se preserva en  $E_A$ . Esto es,

$$E_{*2} = 2E_{*1} \quad \text{y} \quad E_{*4} = E_{*1} + E_{*3}.$$

No se trata de una mera coincidencia, se trata de una característica de lo que sucede en general. En la matriz  $A$ , las relaciones lineales entre las columnas básicas y las no básicas suelen ocultarse en el farrago de coeficientes no nulos, no ocurre lo mismo con las relaciones lineales entre las columnas de  $E_A$ , estas son transparentes. Esto significa que la matriz  $E_A$  se puede utilizar como si fuese un “password” para desbloquear las relaciones ocultas entre las columnas de  $A$ .