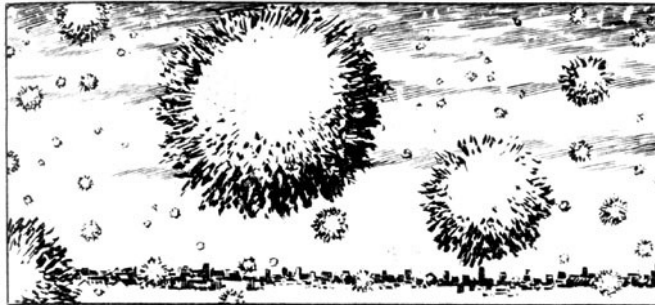


---

Álgebra II (Curso 23)  
Segundo cuatrimestre, 2021  
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:  
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 15 DE SEPTIEMBRE  
Sebastian GRYNBERG

---



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,  
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Introducción	2
1.1. Preliminares y notación	2
1.2. Ejemplos	3
2. Los 4 fantásticos	5
2.1. Presentación	5
2.2. Propiedades y relaciones	7
2.3. Los cuatro fantásticos	8
2.4. Ecuaciones lineales	9

## 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Preliminares y notación.

En todo lo que sigue  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Las columnas de  $A$  se pueden identificar como elementos de  $\mathbb{K}^m$ , y sus filas como elementos de  $\mathbb{K}^n$ . Utilizaremos la notación  $A_{*j}$  para designar a la  $j$ -ésima columna de  $A$ , y la notación  $A_{i*}$  para designar a la  $i$ -ésima fila de  $A$ . Con esas notaciones la matriz  $A$  se puede representar de dos maneras. La primera, organizada como filas

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*}^T \\ A_{2*}^T \\ \vdots \\ A_{m*}^T \end{bmatrix},$$

y la segunda organizada como columnas

$$A = [A_{*1} \quad A_{*2} \quad \cdots \quad A_{*n}].$$

Por ejemplo, si  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  es la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

sus 3 filas,  $A_{i*} \in \mathbb{R}^5$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , son

$$\begin{aligned} A_{1*} &= [1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 5]^T, \\ A_{2*} &= [-2 \quad -4 \quad 0 \quad 4 \quad -2]^T, \\ A_{3*} &= [1 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 9]^T, \end{aligned}$$

y sus 5 columnas,  $A_{*j} \in \mathbb{R}^3$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , son

$$A_{*1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, A_{*3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A_{*4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, A_{*5} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

**Nota Bene.** Nótese que para cada  $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \in \mathbb{K}^n$  vale que

$$(1) \quad Ax = \begin{bmatrix} A_{1*}^T x \\ A_{2*}^T x \\ \vdots \\ A_{m*}^T x \end{bmatrix}.$$

y también vale que

$$(2) \quad Ax = x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \cdots + x_n A_{*n}$$

## 1.2. Ejemplos.

**Ejemplo 1.1.** Examinamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Se trata de un sistema de 4 ecuaciones lineales que involucran 5 incógnitas. Centramos nuestra atención en la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener la forma escalonada por filas reducida de  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A.$$

Como los sistemas  $Ax = 0$  y  $E_Ax = 0$  son equivalentes, resulta inmediatamente que

$$Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_4, \\ x_3 = -x_4, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

donde  $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ . Esto significa que los  $x \in \mathbb{R}^5$  que satisfacen la ecuación  $Ax = 0$  tienen la forma

$$\begin{aligned} x &= [-2x_2 - 2x_4 \quad x_2 \quad -x_4 \quad x_4 \quad 0]^T \\ &= x_2 [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + x_4 [-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^T, \end{aligned}$$

con  $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ . En otras palabras,

$$\{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\} = \text{gen} \left\{ [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^T \right\}.$$

□

**Ejemplo 1.2.** Examinamos ahora el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 4x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 7x_5 = 16. \end{cases}$$

Centramos nuestra atención en la matriz de coeficientes  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  y en el vector de términos independientes  $b \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada  $[A|b]$  para obtener su forma escalonada por filas reducida,

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{G-J}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [E_A|e_b].$$

Como los sistemas  $Ax = b$  y  $E_Ax = e_b$  son equivalentes, resulta inmediatamente que

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_4, \\ x_3 = -1 - x_4, \\ x_5 = 2, \end{cases}$$

donde  $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ . Esto significa que los  $x \in \mathbb{R}^5$  que satisfacen la ecuación  $Ax = b$  tienen la forma

$$\begin{aligned} x &= [1 - 2x_2 - 2x_4 \quad x_2 \quad -1 - x_4 \quad x_4 \quad 2]^T \\ &= [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 2]^T + x_2 [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + x_4 [-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^T, \end{aligned}$$

con  $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ . En otras palabras,

$$\{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = b\} = x_p + \text{gen} \left\{ [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^T \right\},$$

donde  $x_p = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 2]^T$  es una solución particular del sistema  $Ax = b$ .  $\square$

**Ejemplo 1.3.** Por último, examinamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 4x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 7x_5 = 16. \end{cases}$$

Centramos nuestra atención en la matriz de coeficientes  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$  y en el vector de términos independientes  $b = [6 \quad 10 \quad 10 \quad 16]^T$ .

Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada  $[A|b]$  para obtener su forma escalonada por filas reducida,

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{G-J}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right] = [E_A|e_b].$$

Como los sistemas  $Ax = b$  y  $E_Ax = e_b$  son equivalentes, resulta inmediatamente que el sistema  $Ax = b$  no tiene solución.  $\square$

**Comentarios.** Los ejemplos anteriores ilustran distintos tipos escenarios que se pueden presentar cuando se analiza el comportamiento de un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{K}^m$ . En todos los ejemplos presentados la matriz de coeficientes del sistema es la misma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

y su forma escalonada por filas reducida es

$$E_A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se observa que el rango de  $A$  es 3 y que sus columnas básicas son la primera, la tercera y la quinta. Esas columnas representan los coeficientes del sistema que multiplican a las variables  $x_1, x_3, x_5$  que reciben el nombre de *variables básicas*, las otras dos,  $x_2$  y  $x_4$ , se llaman *variables libres* y son las variables que se utilizaron para describir las soluciones de los sistemas examinados.

En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos se presentaron dos escenarios: el primero, *compatible indeterminado*, y el segundo, *incompatible*. Lo que los diferencia es el comportamiento del rango de la matriz ampliada. En el primer caso el rango es 3 y en el segundo el rango es 4. Veamos cada caso por separado:

1. *Compatible indeterminado*. La matriz ampliada  $[A|b]$  se reduce a

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Eso significa que el vector de términos independientes  $b$  es combinación lineal de las tres columnas básicas de  $A$ ,  $A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}$ . Concretamente se puede ver que

$$b = A_{*1} - A_{*3} + 2A_{*5}.$$

2. *Incompatible*. La matriz ampliada  $[A|b]$  se reduce a

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right].$$

Eso significa que el vector de términos independientes  $b$  no pertenece al subespacio generado por las tres columnas básicas de  $A$ ,  $A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}$ . Y esa es la razón por la que el sistema es incompatible.

## 2. LOS 4 FANTASTICOS

### 2.1. Presentación.

En lo que sigue estudiaremos los problemas relacionados con la resolución de la ecuación lineal  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{K}^m$ . Mostraremos que el análisis de la ecuación y de su conjunto de soluciones se puede realizar mediante los *cuatro*

espacios fundamentales de la matriz  $A$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{col}(A) &= \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m, \\ \operatorname{nul}(A) &= \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^n, \\ \operatorname{col}(A^T) &= \{A^T y : y \in \mathbb{K}^m\} \subset \mathbb{K}^n \\ \operatorname{nul}(A^T) &= \{y \in \mathbb{K}^m : A^T y = 0\} \subset \mathbb{K}^m.\end{aligned}$$

Estos cuatro subespacios permiten narrar la historia completa del sistema lineal  $Ax = b$ .

**Definición 2.1.** El espacio columna de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^m$  generado por las columnas de  $A$  y se denota por  $\operatorname{col}(A)$ :

$$\operatorname{col}(A) := \operatorname{gen}\{A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m.$$

**Nota Bene.** Nótese que  $Ax = b$  tiene solución si y solamente si  $b \in \operatorname{col}(A)$

**Definición 2.2.** El espacio nulo de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^n$  definido por

$$\operatorname{nul}(A) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

En otras palabras,  $\operatorname{nul}(A)$  es el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo  $Ax = 0$ .

**Nota Bene.** Nótese que si  $b \in \operatorname{col}(A)$ , todas las soluciones de la ecuación  $Ax = b$  son de la forma  $x = x_p + x_h$ , con  $x_p$  tal que  $Ax_p = b$  y  $x_h \in \operatorname{nul}(A)$ . En otras palabras,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = x_p + \operatorname{nul}(A).$$

Esto es así porque si  $x$  y  $x_p$  son dos soluciones particulares de  $Ax = b$ , se tiene que  $x - x_p \in \operatorname{nul}(A)$  debido a que  $A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$ . Esto basta para comprobar que  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \subseteq x_p + \operatorname{nul}(A)$ . La otra inclusión,  $x_p + \operatorname{nul}(A) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ , se deduce de manera similar y queda como ejercicio.

**Definición 2.3.** El espacio fila de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^n$  generado por las filas de  $A$  y se denota por  $\operatorname{fil}(A)$ :

$$\operatorname{fil}(A) := \operatorname{gen}\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}\} = \{A^T y : y \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

**Nota Bene.** Nótese que

$$\operatorname{fil}(A) = \operatorname{col}(A^T).$$

**Definición 2.4.** El espacio nulo a izquierda de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^m$  definido por

$$\operatorname{nul}(A^T) := \{y \in \mathbb{K}^m : A^T y = 0\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

En otras palabras,  $\operatorname{nul}(A^T)$  es el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo  $A^T y = 0$ .

**Nota Bene.** Nótese que  $A^T y = 0 \iff y^T A = 0$ . Lo que explica el nombre que recibe el subespacio  $\operatorname{nul}(A^T)$ .

## 2.2. Propiedades y relaciones.

**Ayudamemoria.** Definimos *el rango de A* mediante

$$\begin{aligned} \text{rango}(A) &:= \text{cantidad de pivotes de } E_A \\ &= \text{cantidad de filas no nulas de } E_A \\ &= \text{cantidad de columnas básicas de } A, \end{aligned}$$

donde las *columnas básicas* de  $A$  se definieron por ser aquellas columnas de  $A$  que contienen las posiciones pivotales.

**Nota Bene.** Nótese que valen las siguientes identidades

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{fil}(A)).$$

Nótese también que las variables libres de  $Ax = 0$  son las que determinan la dimensión de  $\text{nul}(A)$ . Como las variables libres son las complementarias de las variables básicas, se deduce que

$$\dim(\text{nul}(A)) = n - \text{rango}(A) = n - \dim(\text{col}(A)).$$

Si en lugar de considerar la matriz  $A$ , se considera la matriz  $A^T$  se obtiene que

$$\dim(\text{nul}(A^T)) = m - \dim(\text{col}(A^T)) = m - \dim(\text{fil}(A)).$$

**Lema 2.5.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Vale que

$$\text{fil}(A) \cap \text{nul}(A) = \{0\}$$

*Demostración.* Todo vector de  $x \in \text{fil}(A)$  es de la forma

$$(3) \quad x = \sum_{i=1}^m \xi_i A_{i*},$$

y todo vector de  $\text{nul}(A)$  satisface que

$$(4) \quad A_{i*}^T x = 0 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{I}_m.$$

De (3) y (4) se deduce que todo vector  $x \in \text{fil}(A) \cap \text{nul}(A)$  satisface que

$$(5) \quad x^T x = \left( \sum_{i=1}^m \xi_i A_{i*} \right)^T x = \left( \sum_{i=1}^m \xi_i A_{i*}^T \right) x = \sum_{i=1}^m \xi_i A_{i*}^T x = 0.$$

Por otra parte, los vectores  $x \in \mathbb{R}^n$  son de la forma  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ , con  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , motivo por el cual

$$(6) \quad x^T x = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

De (5) y (6) se concluye que si  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \text{fil}(A) \cap \text{nul}(A)$ , entonces  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ , y en consecuencia  $x = 0$ . Por otra parte está claro que  $0 \in \text{fil}(A) \cap \text{nul}(A)$ .  $\square$

**Nota Bene.** Sabemos que cuando  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz de rango  $r$ , se tiene que  $\dim(\text{fil}(A)) = r$  y que  $\dim(\text{nul}(A)) = n - r$ . Eso significa que toda base de  $\text{fil}(A)$  posee  $r$  elementos y que toda base de  $\text{nul}(A)$  posee  $n - r$  elementos.

**Corolario 2.6.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si  $\mathcal{B}_f$  es una base de  $\text{fil}(A)$  y  $\mathcal{B}_h$  es una base de  $\text{nul}(A)$ , entonces  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_f \cup \mathcal{B}_h$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ . En particular, cada vector de  $x \in \mathbb{R}^n$  se descompone de manera única en la forma

$$x = x_f + x_h,$$

donde  $x_f \in \text{fil}(A)$  y  $x_h \in \text{nul}(A)$ .

*Demostración.* Sean  $f_1, \dots, f_r$  los vectores de una base de  $\text{fil}(A)$  y  $h_1, \dots, h_{n-r}$  los vectores de una base  $\text{nul}(A)$ . Probar que  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_{n-r}\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$  equivale a probar que el conjunto  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente. Se hace por definición. Observamos que

$$\sum_{k=1}^r a_k f_k + \sum_{\ell=1}^{n-r} b_\ell h_\ell = 0 \iff \sum_{k=1}^r a_k f_k = - \sum_{\ell=1}^{n-r} b_\ell h_\ell$$

Esto significa que los dos términos de la segunda igualdad son vectores de  $\text{fil}(A) \cap \text{nul}(A)$ . En consecuencia ambos son el vector nulo, y por independencia lineal de las bases  $\{f_1, \dots, f_r\}, \{h_1, \dots, h_{n-r}\}$  se concluye que  $a_1 = \dots = a_r = b_1 = \dots = b_{n-r} = 0$ .  $\square$

### 2.3. Los cuatro fantásticos.

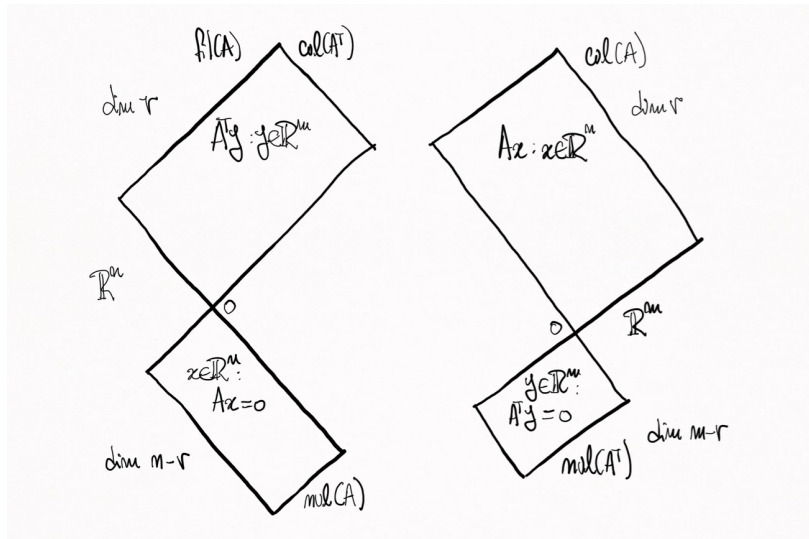


FIGURA 1. Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $r$ : sus dimensiones y relaciones.

## 2.4. Ecuaciones lineales.

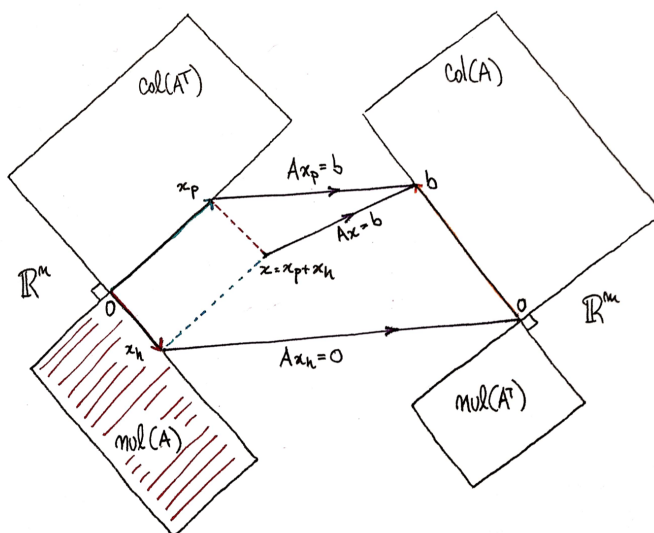


FIGURA 2. La acción de  $A$  sobre  $\mathbb{R}^n$ : el espacio filas de  $A$  se transforma en el espacio columnas, el nulo de  $A$  en el vector cero. Dado  $b \in \text{col}(A) \setminus \{0\}$ , el sistema  $Ax = b$  tiene solución. Hay una única solución particular  $x_p \in \text{col}(A^T)$ . La solución general es  $x = x_p + x_h$ , donde  $x_h \in \text{nul}(A)$ .