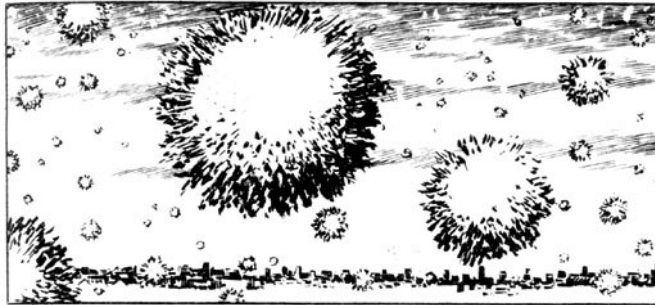

Álgebra II (Curso 23)
Primer cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 20 DE SEPTIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Bases y coordenadas	2
1.1. Introducción	2
1.2. Coordenadas	2
1.3. Matriz de cambio de coordenadas	4
2. Aplicación	6
2.1. Ayudamemoria	6
2.2. Chupetines	6
2.3. Combinaciones lineales e interpolación	7
2.4. Independencia lineal	8
2.5. Coordenadas respecto de la base de Lagrange	8
2.6. Matrices de Vandermonde	9

1. BASES Y COORDENADAS

1.1. Introducción.

En todo lo que sigue \mathbb{V} será un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} . Para cada vector $v \in \mathbb{V}$, existe un único vector $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{K}^n$ tal que $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$.

Demostración. Decir que \mathcal{B} es una base de \mathbb{V} significa dos cosas.

- Primera, el conjunto de vectores \mathcal{B} es un sistema de generadores de \mathbb{V} , i.e., todo vector de \mathbb{V} es combinación lineal de los vectores de \mathcal{B} . Esto garantiza la existencia de un vector $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{K}^n$ tal que $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$.
- Segunda, el conjunto de vectores \mathcal{B} es linealmente independiente, i.e., ninguna combinación lineal no trivial de los vectores de \mathcal{B} tiene como resultado el vector cero. Esto garantiza la unicidad de la representación de v deducida en el punto anterior. \square

1.2. Coordenadas.

A cada vector $v \in \mathbb{V}$ le corresponde un único vector $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Ese vector $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{K}^n$, que está unívocamente determinado por el vector v , se llama *el vector de coordenadas de v respecto de la base \mathcal{B}* y se lo designa mediante $[v]^{\mathcal{B}}$.

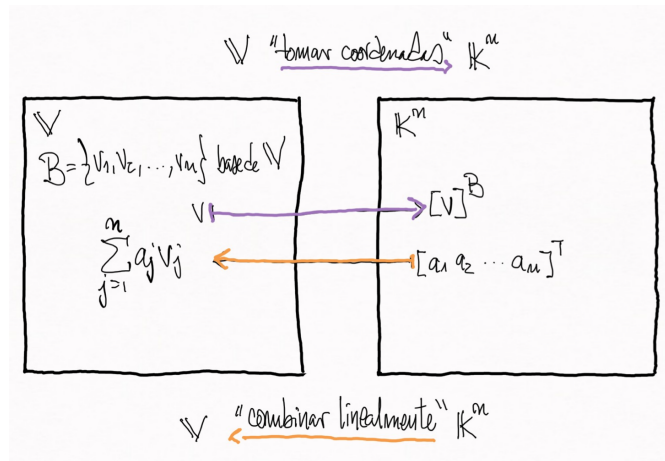


FIGURA 1. En cierto sentido \mathbb{K}^n es el representante aritmético que permite computar nuestras observaciones en cualquier \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n .

Nota Bene. Nótese que para $v_j \in \mathcal{B}$ tenemos que $[v_j]^{\mathcal{B}} = e_j$, el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{K}^n .

Ejemplo 1.2. Comprobar que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de \mathbb{R}^3 y hallar el vector de coordenadas de $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ respecto de la base \mathcal{B} .

Como la dimensión de \mathbb{R}^3 es 3 para comprobar que \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}^3 es suficiente verificar que \mathcal{B} es linealmente independiente. En otras palabras, se trata de mostrar que el sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es compatible determinado. Esto se comprueba inmediatamente calculando el determinante de su matriz de coeficientes ya que el mismo vale 27.

El vector de coordenadas de $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ respecto de la base \mathcal{B} se construye resolviendo el sistema lineal no homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Vale que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[x]^{\mathcal{B}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

□

Nota Bene. Fijada una base \mathcal{B} de \mathbb{V} , todos los vectores de \mathbb{V} se identifican en \mathbb{K}^n mediante sus correspondientes vectores de coordenadas respecto de \mathcal{B} . Esa identificación preserva las relaciones lineales entre los vectores de \mathbb{V} . Esto es, para cualquier pareja $v, w \in \mathbb{V}$ y cualquier $a \in \mathbb{K}$, vale que

$$\begin{aligned} [v + w]^{\mathcal{B}} &= [v]^{\mathcal{B}} + [w]^{\mathcal{B}}, \\ [av]^{\mathcal{B}} &= a[v]^{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Esto significa que *desde un punto de vista morfológico* \mathbb{V} y \mathbb{K}^n tienen la misma forma. Formalmente, vale el siguiente resultado.

Teorema 1.3 (Iso-morfismo de coordenadas). *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} . La aplicación $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ definida por $\Phi_{\mathcal{B}}(v) := [v]^{\mathcal{B}}$ posee las siguientes propiedades:*

- 1) $\Phi_{\mathcal{B}}$ es lineal. Esto es, para cada par $v, w \in \mathbb{V}$ y cada $a \in \mathbb{K}$, vale que
- $\Phi_{\mathcal{B}}(v + w) = \Phi_{\mathcal{B}}(v) + \Phi_{\mathcal{B}}(w)$,
 - $\Phi_{\mathcal{B}}(av) = a\Phi_{\mathcal{B}}(v)$.
- 2) $\Phi_{\mathcal{B}}$ es biyectiva y además

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \left([a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T \right) = \sum_{j=1}^n a_j v_j.$$

Corolario 1.4. Son equivalentes:

- El conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ es linealmente independiente en \mathbb{V} .
- El conjunto $\{[u_1]^{\mathcal{B}}, [u_2]^{\mathcal{B}}, \dots, [u_m]^{\mathcal{B}}\}$ es linealmente independiente en \mathbb{K}^n .

Ejemplo 1.5. El conjunto de funciones

$$\mathcal{F} = \{2 + 2 \cos(x) + \sin(x), -2 + \cos(x) + 2 \sin(x), 1 - 2 \cos(x) + 2 \sin(x)\}$$

es linealmente independiente porque el conjunto correspondiente de vectores de coordenadas respecto de la base $\mathcal{B} = \{1, \cos(x), \sin(x)\}$,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

es linealmente independiente. □

1.3. Matriz de cambio de coordenadas.

Planteo del problema. Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dos bases de \mathbb{V} . Dado el vector de coordenadas de $v \in \mathbb{V}$ respecto de la base \mathcal{B}_1 , $[v]^{\mathcal{B}_1}$, ¿qué se puede hacer para obtener, $[v]^{\mathcal{B}_2}$, el vector de coordenadas de v respecto de la base \mathcal{B}_2 ?

Lo más simple es tratar de construir una matriz inversible $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que realice las tareas de un traductor. El objetivo está cumplido si para todo $v \in \mathbb{V}$ ocurre lo siguiente:

$$A[v]^{\mathcal{B}_1} = [v]^{\mathcal{B}_2}.$$

En particular, una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que posea esas propiedades tiene que satisfacer que

$$A[v_j]^{\mathcal{B}_1} = [v_j]^{\mathcal{B}_2}, \quad \forall j \in \mathbb{I}_n.$$

Pero

$$A[v_j]^{\mathcal{B}_1} = Ae_j = A_{*j},$$

lo que significa que la columna j de A tiene que ser el vector de coordenadas del j -ésimo vector de la base \mathcal{B}_1 respecto de la base \mathcal{B}_2 . La única candidata a satisfacer nuestras demandas es la matriz

$$A = [[v_1]^{\mathcal{B}_2} \ [v_2]^{\mathcal{B}_2} \ \cdots \ [v_n]^{\mathcal{B}_2}].$$

Examinemos si efectivamente los satisface. Para eso consideramos $v \in \mathbb{V}$. Recordamos que $[v]^{\mathcal{B}_1} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ si y solamente si $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ y dejamos

actuar a la matriz A sobre el vector $[v]^{\mathcal{B}_1}$:

$$\begin{aligned} A[v]^{\mathcal{B}_1} &= [[v_1]^{\mathcal{B}_2} \quad [v_2]^{\mathcal{B}_2} \quad \cdots \quad [v_n]^{\mathcal{B}_2}] [a_1 \quad a_2 \cdots a_n]^T \\ &= \sum_{j=1}^n a_j [v_j]^{\mathcal{B}_2} = \left[\sum_{j=1}^n a_j v_j \right]^{\mathcal{B}_2} = [v]^{\mathcal{B}_2}. \end{aligned}$$

Definición 1.6. Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dos bases de \mathbb{V} . $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es la única matriz cuadrada tal que

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} [v]^{\mathcal{B}_1} = [v]^{\mathcal{B}_2}, \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ se llama la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 en la base \mathcal{B}_2 y sus columnas son los vectores coordinados de los vectores de la base \mathcal{B}_1 respecto de la base \mathcal{B}_2 , i.e.,

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = [[v_1]^{\mathcal{B}_2} \quad [v_2]^{\mathcal{B}_2} \quad \cdots \quad [v_n]^{\mathcal{B}_2}].$$

Herramienta. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{K}^n . Si \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{K}^n , entonces

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [[v_1]^{\mathcal{E}} \quad [v_2]^{\mathcal{E}} \quad \cdots \quad [v_n]^{\mathcal{E}}].$$

Ejemplo 1.7. Sea \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^3 y sea \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 considerada en el **Ejemplo 1.2**. Vale que

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades. Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ tres bases de \mathbb{V} . Vale que

1. $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$,
2. $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ es inversible y $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = (M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2})^{-1}$.

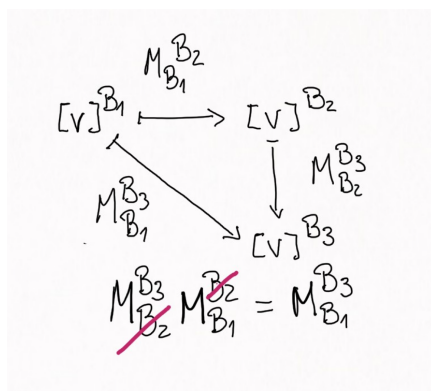


FIGURA 2. Diagrama mnemotécnico.

2. APLICACIÓN

2.1. Ayudamemoria.

Doy por sentado que todos sabemos que si $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \setminus \{0\}$, no pueden existir n números reales distintos dos a dos: x_1, x_2, \dots, x_n tales que

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = 0.$$

En otras palabras, un polinomio de grado menor que n no puede tener más de $n - 1$ raíces diferentes salvo que sea el polinomio nulo.

Lema 2.1 (Unicidad). Sean $p, q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Si existen n números reales x_1, x_2, \dots, x_n , distintos dos a dos, tales que $p(x_i) = q(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{I}_n$, entonces $p = q$. En otras palabras, todo polinomio de grado menor que n queda unívocamente determinado por sus valores en n números reales diferentes entre sí.

Demostración. Consideramos el polinomio $r = p - q$. Como $r \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ y $r(x_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{I}_n$, el resultado anterior implica que $r = 0$. Por lo tanto, $p = q$. \square

2.2. Chupetines.

En todo lo que sigue $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ será un conjunto de n números reales distintos dos a dos. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ se trata de construir un polinomio $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}$ tal que

$$(1) \quad p_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

En otras palabras, se quiere que $[p_i(x_1) \ \dots \ p_i(x_n)]^T = e_i$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n .

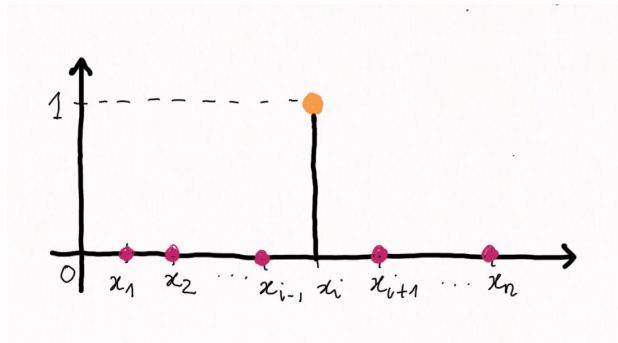


FIGURA 3. Gráfico de los puntos del plano que debe interpolar el polinomio p_i .

Salvo por la primera, las ecuaciones (1) significan que los $n - 1$ números reales del conjunto $\mathcal{X} \setminus \{x_i\}$ son raíces del polinomio p_i . En consecuencia,

$$p_i(x) = a_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n: k \neq i} (x - x_k),$$

para algún $a_i \in \mathbb{R}$. Por otra parte, la primera ecuación de (1) impone que $p_i(x_i) = 1$, de donde sigue que

$$1 = a_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n: k \neq i} (x_i - x_k).$$

Como la productoria del lado derecho de la igualdad es diferente de cero, tenemos que

$$a_i = \frac{1}{\prod_{k \in \mathbb{I}_n: k \neq i} (x_i - x_k)}.$$

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 2.2. Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos dos a dos. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$, el polinomio definido por

$$(2) \quad p_i(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_n: k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

es el único polinomio de grado $n - 1$ que vale 1 cuando $x = x_i$ y tiene como raíces a los elementos de $\mathcal{X} \setminus \{x_i\}$.

Ejemplo 2.3. Consideramos $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$. Los polinomios definidos en (2) son

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4), \\ p_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4), \\ p_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4), \\ p_4(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

2.3. Combinaciones lineales e interpolación.

Lema 2.4. Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos dos a dos. Dados $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ el polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definido por

$$p(x) := \sum_{i=1}^n y_i p_i(x),$$

es el único polinomio de grado menor que n cuyo gráfico $\Gamma_p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ contiene al conjunto $\{(x_j, y_j) : j \in \mathbb{I}_n\}$.

Demostración. De (1) se deduce que para cada $j \in \mathbb{I}_n$ vale que $p_j(x_j) = 1$ y que $p_i(x_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Tenemos así que para cada $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$p(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i p_i(x_j) = y_j \underbrace{p_j(x_j)}_1 + \sum_{i \neq j} y_i \underbrace{p_i(x_j)}_0 = y_j.$$

Esto prueba que el gráfico del polinomio p contiene al conjunto de puntos del plano $\{(x_j, y_j) : j \in \mathbb{I}_n\}$. La unicidad de p se deduce inmediatamente por aplicación del **Lema 2.1**. \square

Ejemplo 2.5. Construir un polinomio de grado 3 que interpole el conjunto de puntos $\{(1, -2), (2, 1/2), (3, 1), (4, -3/2)\}$.

Como el conjunto de las abscisas de esos puntos es el conjunto $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$, tenemos que

$$p = -2p_1 + \frac{1}{2}p_2 + p_3 - \frac{3}{2}p_4,$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 son los polinomios definidos en el **Ejemplo 2.3**. \square

2.4. Independencia lineal.

Consideramos un conjunto $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ de n números reales distintos dos a dos, y para cada $i \in \mathbb{I}_n$ consideramos $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio definido en (2). Vamos a demostrar que *el conjunto de polinomios*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

es linealmente independiente.

Planteamos la ecuación

$$(3) \quad 0 = \sum_{i=1}^n a_i p_i,$$

con incógnitas $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y tenemos que comprobar que su única solución es la solución trivial. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ la ecuación (3) implica que

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i p_i(x_j) = a_j \underbrace{p_j(x_j)}_1 + \sum_{i \neq j} a_i \underbrace{p_i(x_j)}_0 = a_j.$$

Por lo tanto, $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. \square

Como el conjunto $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ posee n polinomios y la dimensión de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ es n , hemos demostrado que vale el siguiente resultado.

Teorema 2.6 (Base de Lagrange). *Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos dos a dos, y para cada $i \in \mathbb{I}_n$ sea $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio definido por*

$$p_i(x) = \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right).$$

El conjunto $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2.5. Coordenadas respecto de la base de Lagrange.

Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos dos a dos, y sea $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$ su correspondiente base de Lagrange. Para cada $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definimos

$$r := p - \sum_{i=1}^n p(x_i) p_i.$$

Por construcción, r es un polinomio de grado menor que n que se anula en todos los elementos del conjunto \mathcal{X} . De acuerdo con el **Lema 2.1**, eso implica que $r = 0$.

Por lo tanto,

$$p = \sum_{i=1}^n p(x_i)p_i.$$

Esto significa que el vector de coordenadas de p respecto de la base \mathcal{B}_X es

$$(4) \quad [p]^{\mathcal{B}_X} = [p(x_1) \quad p(x_2) \quad \dots \quad p(x_n)]^T.$$

Nota Bene. Nótese que en particular, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tenemos que

$$(5) \quad [x^k]^{\mathcal{B}_X} = [x_1^k \quad x_2^k \quad \dots \quad x_n^k]^T.$$

☞: *este último resultado es tremendo.*

Ejemplo 2.7. Sea $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$, y sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. La matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{E} en la base de \mathcal{B}_X es

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

El vector de coordenadas del polinomio

$$p(x) = -\frac{11}{2} + \frac{11}{3}x - \frac{1}{6}x^3$$

respecto de la base \mathcal{B}_X es

$$[p]^{\mathcal{B}_X} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_X} [p]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11/2 \\ 11/3 \\ 0 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

Se accede al mismo resultado calculando $p(1), p(2), p(3), p(4)$.

2.6. Matrices de Vandermonde.

Sea $X = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales distintos dos a dos, sea $\mathcal{B}_X = \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$ su correspondiente base de Lagrange, y sea $\mathcal{E} = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. De acuerdo con (5), la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{E} en la base de \mathcal{B}_X es

$$(6) \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

En la literatura matemática esta matriz se conoce bajo el nombre de *matriz de Vandermonde*. Se trata de una matriz cuya i -ésima fila presenta una progresión geométrica de la forma $1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1}$.

Nota Bene. Nótese que, dados n puntos del plano, $(x_j, y_j) : j \in \mathbb{I}_n$, con abscisas diferentes dos a dos, los coeficientes de la descomposición en base canónica del polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ que los interpola

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$$

se obtienen de la siguiente manera

$$[p]^\mathcal{E} = M_{\mathcal{B}_x}^\mathcal{E} [p]^{\mathcal{B}_x} = \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_x} \right)^{-1} [p]^{\mathcal{B}_x}.$$

Ejemplo 2.8. Hallar la expresión en base canónica del polinomio $p \in \mathbb{R}_3[x]$ cuyo gráfico pasa por los puntos $(1, 1), (2, -1), (3, 1), (4, -1)$.

De acuerdo con la información suministrada el vector de coordenadas de p respecto de la base \mathcal{B}_x debe ser

$$[p]^{\mathcal{B}_x} = [p(1) \ p(2) \ p(3) \ p(4)]^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T,$$

y como $[p]^\mathcal{E} = \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_x} \right)^{-1} [p]^{\mathcal{B}_x}$, tenemos que

$$[p]^\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 24 & -36 & 24 & -6 \\ -26 & 57 & -42 & 11 \\ 9 & -24 & 21 & -6 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 90 \\ -136 \\ 60 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$p(x) = 15 - \frac{68}{3}x + 10x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

□

Comentario. Las matrices de Vandermonde prestan servicios en una gran variedad de aplicaciones prácticas que incluyen desde problemas de interpolación polinomial hasta problemas de procesamiento digital de señales. En lo que sigue las usaremos para demostrar que *el conjunto de funciones* $\mathcal{F} = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$, *con* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *es linealmente independiente* utilizando la técnica del wronskiano. En primer lugar observamos que

$$W(\mathcal{F})(x) = \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

En particular,

$$W(\mathcal{F})(0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0,$$

porque la traspuesta de la matriz que aparece en el lado derecho de la igualdad es la matriz $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}_x}$, con $\mathcal{X} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, motivo por el cual es una matriz inversible. □