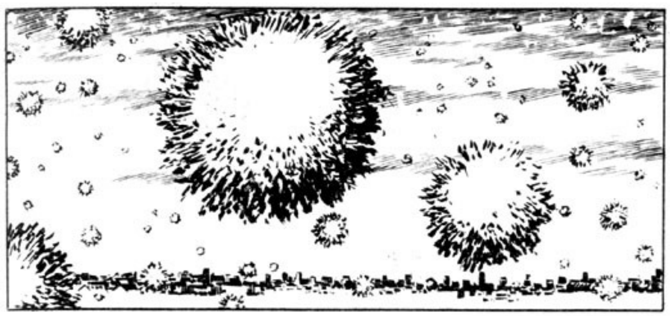
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 22 de septiembre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. El sistema de subespacios

1.1. Introducción.

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ el conjunto de todos los subespacios de $\mathbb{V}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{V}) := \{\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V} : \mathbb{S} \text{ es un subespacio de } \mathbb{V}\}.$$

Orden parcial. En primer lugar destacamos que la relación de inclusión de conjuntos, $\subseteq$, *ordena parcialmente* al conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{V})$. Esto es,

- para todo $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ vale que $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$ (*reflexividad*),
- para todo $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ vale que si $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{S}_3$, entonces $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_3$ (*transitividad*).

Cuando $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son dos subespacios de $\mathbb{V}$ tales que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ se acostumbra decir que $\mathbb{S}$ es *menor que* $\mathbb{T}$ o que $\mathbb{T}$ es *mayor que* $\mathbb{S}$.

Nota Bene. El menor elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ es el *subespacio nulo*, $\{0_{\mathbb{V}}\}$, y el mayor elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ es el espacio vectorial, $\mathbb{V}$. Esto es así, porque $\{0_{\mathbb{V}}\} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ para cualquier $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$.

Nomenclatura. Decimos que un subespacio $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ es un *subespacio propio* cuando $\mathbb{S} \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $\mathbb{S} \neq \mathbb{V}$.

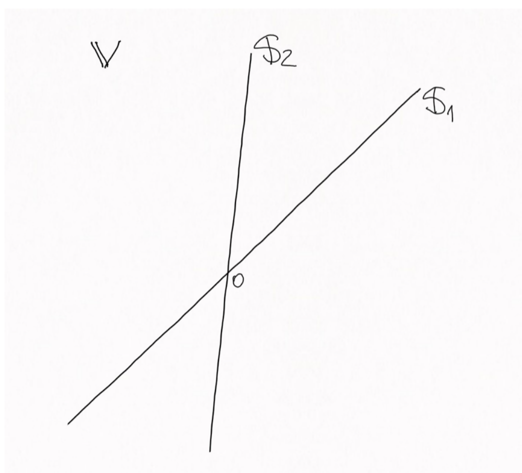


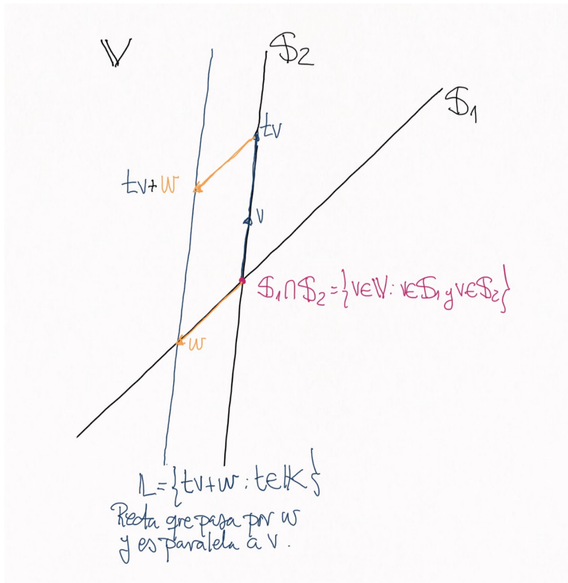
FIGURA 1. Dos subespacios propios de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$, incomparables entre sí. Aquí $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$. En general, $\{0_{\mathbb{V}}\} \subseteq \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.

Lema 1.1 (Técnica geométrica)**.** *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ tales que ninguno contiene al otro. Para cualquier pareja de vectores v y w tales que $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ y $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ la recta $\mathbb{L}$ que pasa por w y es paralela a v*

$$\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{K}\}$$

tiene un único punto en común con $\mathbb{S}_1$ y ninguno con $\mathbb{S}_2$.

Demostración. ¿De qué se trata? Veamos.



En la figura se ve que bajo las condiciones del enunciado

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1 = \{w\} \quad \text{y} \quad \mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset.$$

Lo comprobamos.

- $\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1 = \{w\}$. Razonamos por el absurdo. Si existe $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $tv + w \in \mathbb{S}_1$, entonces existe $u \in \mathbb{S}_1$ tal que $tv + w = u$. Despejamos v y obtenemos
$$v = \frac{1}{t}(u - w).$$
Esto significa que $v \in \mathbb{S}_1$ porque $w, u \in \mathbb{S}_1$, pero $v \notin \mathbb{S}_1$.
- $\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$. Razonamos por el absurdo. Si existe $t \in \mathbb{K}$ tal que $tv + w \in \mathbb{S}_2$, entonces existe $u \in \mathbb{S}_2$ tal que $tv + w = u$. Despejamos w y obtenemos
$$w = u - tv.$$
Esto significa que $w \in \mathbb{S}_2$ porque $v, u \in \mathbb{S}_2$, pero $w \notin \mathbb{S}_2$.

$\square$

Imposibilidad de la unión. Nótese que $\mathbb{V}$ no puede ser la unión de dos subespacios propios. En particular, *es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro.*

En efecto, en las condiciones del **Lema 1.1** la recta $\mathbb{L}$ tiene infinitos puntos porque $v \neq 0$ (y $\mathbb{K}$ tiene infinitos escalares). Si la unión de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ fuese un subespacio tendríamos que $\mathbb{L} \subset \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$, pero entonces

$$\mathbb{L} = \mathbb{L} \cap (\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2) = (\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1) \cup (\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2) = \{w\} \cup \emptyset = \{w\}.$$

Lo que constituye un absurdo. $\square$

1.2. Ínfimo y supremo.

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Por definición, el *ínfimo* de $\{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2\}$ es *el mayor* subespacio *contenido* en $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$; el *supremo* de $\{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2\}$ es *el menor* subespacio que *contiene* a $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$

Traductor.

1. ¿Qué signfica que $\mathbb{S}$ sea *el mayor subespacio contenido en* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathbb{S}_2$?

   a) $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$;
   b) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_2$;
   c) Si $\mathbb{T} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ satisface que $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}_1$ y $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}_2$, entonces $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$.

Nótese que la condición c) implica que $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{S}$, donde

$$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 := \{v \in \mathbb{V} : v \in \mathbb{S}_1 \text{ y } v \in \mathbb{S}_2\}.$$

2. ¿Qué signfica que $\mathbb{S}$ sea *el menor subespacio que contiene a* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathbb{S}_2$?

   a) $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$;
   b) $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}$ y $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{S}$;
   c) Si $\mathbb{T} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ satisface que $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{T}$ y $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{T}$, entonces $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

Nótese que la condición c) implica que $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$, donde

$$\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in \mathbb{S}_1 \text{ y } v_2 \in \mathbb{S}_2\}.$$

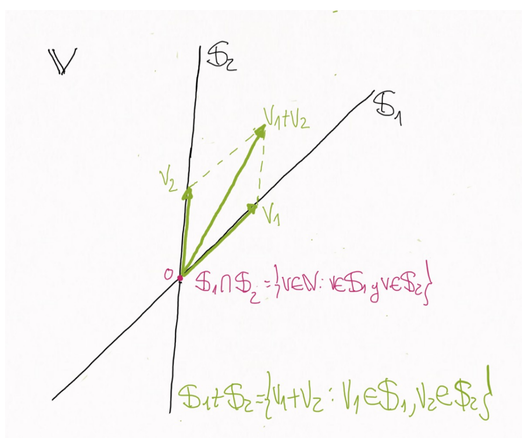


FIGURA 2. Intersección y suma de dos subespacios.

Nota Bene. Mediante una aplicación sencilla del **Lema de 3x8** se pude comprobar que $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ son subespacios de $\mathbb{V}$.

Teorema 1.2 (Caracterización)**.** *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$.*

1. *El mayor subespacio contenido en $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. En otras palabras,* $\text{ínf}\{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2\} = \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.
2. *El menor subespacio que contiene a $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. En otras palabras,* $\sup\{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2\} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$.

1.3. Teorema de la dimensión.

Teorema 1.3. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Vale que*

$$\dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = \dim(\mathbb{S}_1) + \dim(\mathbb{S}_2) - \dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2).$$

Demostración. Presentamos las ideas principales y omitimos los casos extremos. Supongamos que $\dim(\mathbb{S}_1) = m$, que $\dim(\mathbb{S}_2) = n$ y que $\dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = r$, con $1 \leq r < \text{mín}\{m, n\}$.

Consideramos una base $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \dots, u_r\}$ de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y la extendemos a una base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{m-r}\}$ de $\mathbb{S}_1$ y a una base $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-r}\}$ de $\mathbb{S}_2$.

Afirmamos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Que $\mathcal{B}$ sea un sistema de generadores de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ es más o menos claro y lo dejamos como ejercicio. Nos concentraremos en la independencia lineal del conjunto que resulta de unir $\mathcal{B}_1$ con $\mathcal{B}_2$

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{m-r}, w_1, \dots, w_{n-r}\}.$$

Escribimos una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y la igualamos al vector cero:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m-r} b_j v_j + \sum_{k=1}^{n-r} c_k w_k = 0. \tag{1}$$

Despejando la tercera suma, obtenemos

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-r} c_k w_k}_{\in \mathbb{S}_2} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{r} a_i u_i - \sum_{j=1}^{m-r} b_j v_j}_{\in \mathbb{S}_1}. \tag{2}$$

Esto significa que $\sum_{k=1}^{n-r} c_k w_k \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. En consecuencia deben existir escalares $\xi_1, \dots, \xi_r$ tales que $\sum_{k=1}^{n-r} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \xi_i u_i$. Pero entonces $\sum_{k=1}^{n-r} c_k w_k - \sum_{i=1}^{r} \xi_i u_i = 0$, y como $\mathcal{B}_2$ es una base, en particular, esto último implica que $c_1 = \cdots = c_{n-r} = 0$. Esto último repercute sobre la identidad (2) porque ahora sabemos que

$$0 = -\sum_{i=1}^{r} a_i u_i - \sum_{j=1}^{n-r} b_j v_j,$$

y como $\mathcal{B}_1$ es una base, es obligatorio que todos los escalares involucrados en esa combinación lineal sean nulos. Tenemos así que la identidad (1) implica que

$$a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_{m-r} = c_1 = \cdots = c_{n-r} = 0,$$

lo que significa que el conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es linealmente independiente.

Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ la prueba se completa contando vectores:

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) &= r + m - r + n - r \\
&= m + n - r \\
&= \dim(\mathbb{S}_1) + \dim(\mathbb{S}_2) - \dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2).
\end{aligned}$$

$\square$

1.4. Suma directa y unicidad de la descomposición.

Definición 1.4. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Cuando $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$ se dice que la* suma *de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es* directa. *En lugar de escribir $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ escribimos $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.*

Teorema 1.5. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$. Son equivalentes*

1. $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$.
2. *Para cada $v \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$, existen únicos $v_1 \in \mathbb{S}_1, v_2 \in \mathbb{S}_2$ tales que $v = v_1 + v_2$.*
3. *Si $0_{\mathbb{V}} = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$, entonces $v_1 = 0_{\mathbb{V}}$ y $v_2 = 0_{\mathbb{V}}$.*
4. *Si $\mathcal{B}_1$ es una base de $\mathbb{S}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{S}_2$, entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es linealmente independiente.*

Demostración. Ejercicio. Si se quiere se pueden adaptar los argumentos desarrollados por José Luis Mancilla Aguilar en sus notas sobre espacios vectoriales. □

Consecuencias geométricas. Cuando $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son dos *subespacios suplementarios de* $\mathbb{V}$, i.e., $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$, la unicidad de la representación de cada vector $v \in \mathbb{V}$ en la forma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$ es rica en consecuencias geométricas porque puede traducirse al lenguaje de las proyecciones y las simetrías oblicuas.

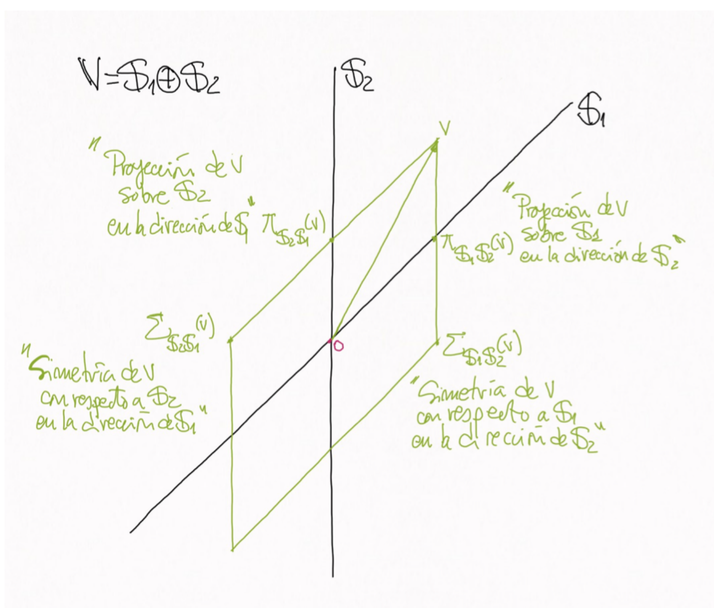


Figura 3. Toda descomposición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$ permite construir dos proyecciones y dos simetrías. Nótese que el conocimiento de una determina todas las demás. Por ejemplo, si se conoce $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)$ las otras tres se obtienen mediante las siguientes tres relaciones: $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) = v - \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)$, $\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) = v - 2\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)$, y $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = v - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v)$.

1.5. Suplementos.

Proposición 1.6. *Si* $\mathbb{V}$ *tiene dimensión finita y* $\mathbb{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$, *entonces existe* $\mathbb{T} \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ *tal que* $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{V}$.

Demostración. Si $\mathbb{S} = \{0_{\mathbb{V}}\}$, $\mathbb{T} = \mathbb{V}$. Si $\mathbb{S} = \mathbb{V}$, $\mathbb{T} = \{0_{\mathbb{V}}\}$. En otro caso, elegimos una base de $\mathbb{S}$, digamos $\mathcal{B}_1$ y la extendemos a una base de $\mathbb{V}$ mediante la unión de un conjunto de vectores $\mathcal{B}_2$ tal que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea linealmente independiente y tenga tantos elementos como la dimensión de $\mathbb{V}$. La existencia de tal conjunto está garantizada por el **Lema de sustitución de Steinitz**. Definiendo $\mathbb{T} := \text{gen}(\mathcal{B}_2)$ se obtiene el suplemento de $\mathbb{S}$ que se deseaba. □

2. Técnicas de cálculo

2.1. Bases de una suma.

Nota Bene. Nótese que la demostración del **Teorema de la dimensión** es constructiva. En la misma se ofrece un método para obtener una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Se parte de una base de $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$, se la extiende a una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{S}_1$ y a una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{S}_2$. Hecho eso, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ se obtiene de la siguiente manera

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2.$$

Alternativa. Otro método para hallar una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ es unir una base de $\mathbb{S}_1$ con una base de $\mathbb{S}_2$ y luego eliminar de la unión resultante tantos vectores como sea necesario hasta obtener un conjunto de generadores linealmente independiente.

Ese procedimiento se puede realizar mecánicamente utilizando cualquiera de los dos algoritmos presentados en el **Ejercicio 1.13**. La implementación aritmética depende de la elección de una base de referencia $\mathcal{B}_r$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$ que hace de contexto. En lugar de trabajar con los vectores de las bases de los subespacios considerados se trabaja con sus correspondientes vectores de coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}_r$. El isomorfismo de coordenadas se ocupa del resto.

2.2. Bases de una intersección en $\mathbb{K}^n$.

Los subespacios de $\mathbb{K}^n$ se pueden presentar de dos maneras:

- $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} = \text{nul}(A)$, con $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
- $\mathbb{S} = \text{gen}(\mathcal{B})$ con $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ una base de $\mathbb{S}$.

Cuando se analiza el comportamiento de la intersección de dos subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ esas dos maneras de presentación dan lugar a tres escenarios diferentes:

1. $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{K}^n : A_1 x = 0\}$ y $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{K}^n : A_2 x = 0\}$, con $A_1 \in \mathbb{K}^{m_1 \times n}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{m_2 \times n}$. En este caso
$$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}, \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(m_1+m_2) \times n}.$$
2. $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}(\mathcal{B})$, con $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ una base de $\mathbb{S}_2$. En este caso hay que observar que $v \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ si y solamente

si

$$v = \sum_{j=1}^{r} \xi_j v_j, \tag{3}$$

con $\xi_j \in \mathbb{K}$, es tal que $Av = 0$. El problema se resuelve determinando cómo deben ser las incógnitas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ para que valga que

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}^m} &= A\left(\sum_{j=1}^{r} \xi_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \xi_j A v_j \\ &= \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_r \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{4}$$

Se resuelve el sistema (4) en las variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ y se enchufan sus expresiones resultantes en la descomposición del vector v dada en (3). Se reagrupan los términos en función de las variables libres y se determina una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.

3. $\mathbb{S}_1 = \text{gen}(\mathcal{B}_1)$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}(\mathcal{B}_2)$, con $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r_1}\}$ una base de $\mathbb{S}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_{r_2}\}$ una base de $\mathbb{S}_2$. En este caso hay que observar que $v \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ si y solamente si

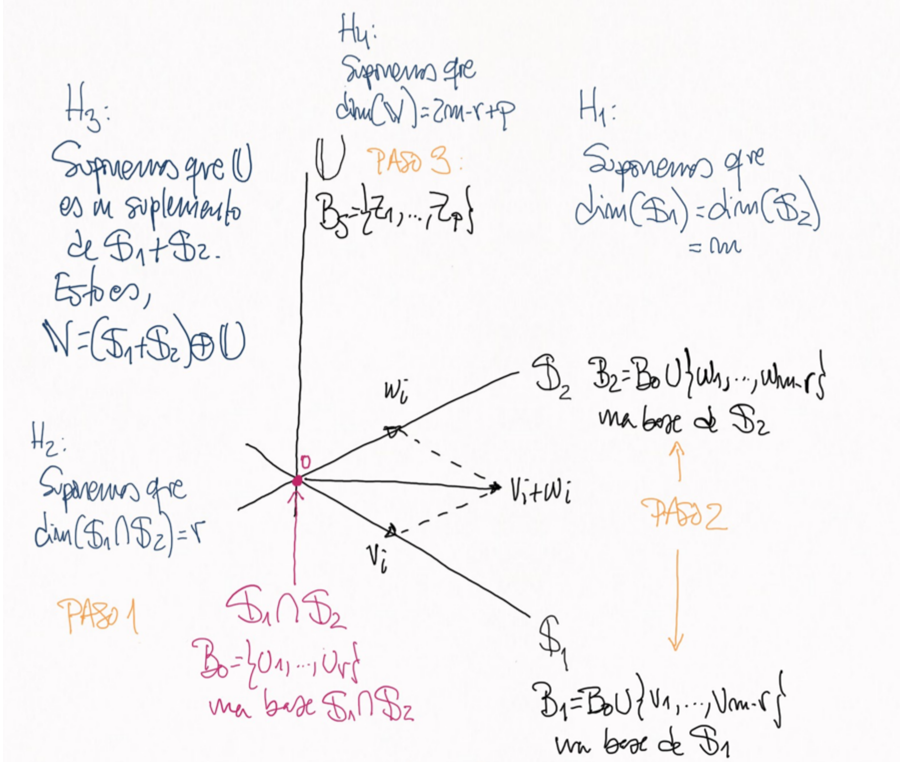
$$v = \sum_{j=1}^{r_1} \xi_j v_j \ \text{ y } \ v = \sum_{k=1}^{r_2} \eta_k w_k, \tag{5}$$

con $\xi_j \in \mathbb{K}$ y $\eta_k \in \mathbb{K}$ El problema se resuelve determinando cómo deben ser las incógnitas $\xi_1, \dots, \xi_{r_1}, \eta_1, \dots, \eta_{r_2}$ para que valga que

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}^n} &= \sum_{j=1}^{r_1} \xi_j v_j - \sum_{k=1}^{r_2} \eta_k w_k \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_{r_1} & w_1 & \cdots & w_{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{r_1} & -\eta_1 & \cdots & -\eta_{r_2} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{6}$$

Etcétera.

2.3. Suplementos comunes.



Un suplemento común para S_1 y S_2 se puede construir de la siguiente manera

$$\mathbb{T} = \text{gen}\{z_1, \ldots, z_p, v_1+w_1, \ldots, v_{m-r}+w_{m-r}\}$$