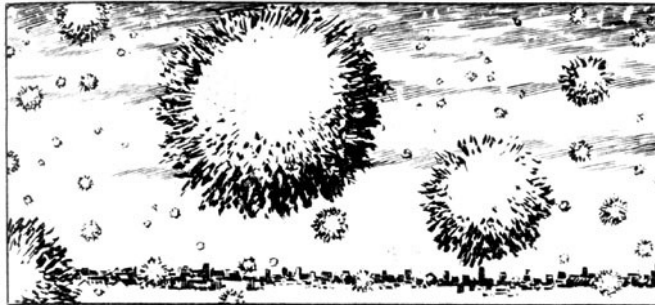

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 27 DE SEPTIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Transformaciones lineales	2
1.1. Definición	2
1.2. Ejemplos (1)	3
1.3. Los prefijos “mono”, “epi”, “iso” + el sufijo “morfismo”	5
1.4. El núcleo y la imagen de una transformación lineal	6
1.5. Para una caracterización de la imagen	7
1.6. Resolución de ecuaciones lineales	8
1.7. Ejemplos (2)	9
1.8. El teorema de la dimensión	10
1.9. Método para resolver ecuaciones lineales	11

1. TRANSFORMACIONES LINEALES

Informalmente, una *transformación lineal* es una aplicación de un espacio vectorial en otro que preserva las operaciones del espacio vectorial (*i.e.*, *preserva las combinaciones lineales*). Seamos más precisos.

1.1. Definición.

Definición 1.1. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Se dice que T es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} , cuando satisface las siguientes propiedades:

- 1) Aditividad: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.
- 2) Homogeneidad: $T(av) = aT(v)$ para todo $v \in \mathbb{V}$, $a \in \mathbb{K}$.

Las propiedades 1) y 2) se pueden expresar diciendo que T preserva la estructura de \mathbb{K} -espacio vectorial, o diciendo que T preserva la suma vectorial y la multiplicación escalar, o también diciendo que T es un homomorfismo de \mathbb{K} -espacios vectoriales de \mathbb{V} en \mathbb{W} .

Lema 1.2. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Entonces,

$$(1) \quad T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$$

Demostración. En efecto, $T(0_{\mathbb{V}}) = T(0 \cdot 0_{\mathbb{V}}) = 0 \cdot T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$. □

Criterio para verificar linealidad. Por definición, verificar que una aplicación $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} , requiere comprobar la veracidad cada una las dos propiedades por separado:

- 1) T preserva la suma vectorial (*i.e.*, T es aditiva),
- 2) T preserva la multiplicación escalar (*i.e.*, T es homogénea).

SIMPLIFICACIÓN. Si se comprueba que para todo par de vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ y para todo $a \in \mathbb{K}$ vale que

$$T(av_1 + v_2) = aT(v_1) + T(v_2),$$

se deduce inmediatamente que T es una transformación lineal.

Lema 1.3. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación de \mathbb{V} en \mathbb{W} . T es una transformación lineal si, y sólo si, para todo par de vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ y para toda pareja de escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, se cumple la siguiente propiedad

$$(2) \quad T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2).$$

Demostración. A cargo del lector. □

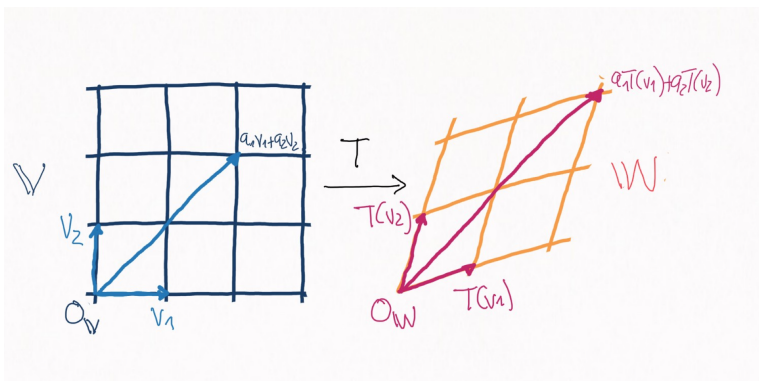


FIGURA 1. Comportamiento básico de una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$.

Situación general. Por inducción en la cantidad n de vectores v_1, \dots, v_n y escalares a_1, \dots, a_n se comprueba que toda transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ verifica:

$$(3) \quad T \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j T(v_j),$$

cualesquiera sean $n \geq 2$, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

1.2. Ejemplos (1).

Ejemplo 1.4 (Transformación lineal nula). Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales. La aplicación $0_{\mathbb{W}\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ definida por

$$0_{\mathbb{W}\mathbb{V}}(v) := 0_{\mathbb{W}} \text{ para todo } v \in \mathbb{V}$$

es una transformación lineal que llamamos la *transformación lineal nula*.

Ejemplo 1.5 (Identidad de \mathbb{V}). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. La aplicación $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definida por

$$I_{\mathbb{V}}(v) := v \text{ para todo } v \in \mathbb{V}$$

es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} que llamamos la *transformación identidad de \mathbb{V}* .

Ejemplo 1.6 (Proyecciones oblicuas). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 dos subespacios de \mathbb{V} tales que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{V}$. Sabemos que todo $v \in \mathbb{V}$, se escribe unívocamente en la forma

$$v = v_1 + v_2, \text{ con } v_1 \in \mathbb{S}_1 \text{ y } v_2 \in \mathbb{S}_2.$$

Definiendo para todo $v \in \mathbb{V}$

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1,$$

es inmediato que la aplicación $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} , que llamaremos la *proyección oblicua de \mathbb{V} sobre \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2* .

Análogamente, definimos la aplicación $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ mediante

$$\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2,$$

que también es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} .

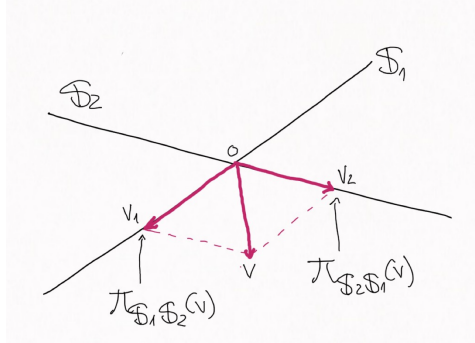


FIGURA 2. Proyecciones oblicuas inducidas por una descomposición del espacio vectorial de la forma $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$. Nótese que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

⚠ El orden de \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 altera la definición de $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. De hecho, $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \neq \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$. Además, la elección del suplemento de \mathbb{S}_1 también produce una diferencia: si $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 \oplus \tilde{\mathbb{S}}_2$ con $\mathbb{S}_2 \neq \tilde{\mathbb{S}}_2$, entonces $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \neq \Pi_{\mathbb{S}_1\tilde{\mathbb{S}}_2}$.

Ejemplo 1.7 (Multiplicación matricial). Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ una matriz de $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} . Definiendo para todo $x \in \mathbb{K}^n$

$$T_A(x) := Ax,$$

es inmediato que la aplicación $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal de \mathbb{K}^n en \mathbb{K}^m .

Ejemplo 1.8 (Muestreo). El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es el espacio vectorial de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Este espacio vectorial se puede utilizar para representar, por ejemplo, señales de sonido $\varphi(t)$. En la práctica, un dispositivo de medición no puede capturar toda la información contenida en una señal (ya que la misma contiene una cantidad infinita de datos); solo muestrea una cantidad finita de datos en algunos momentos fijos. Por ejemplo, si un dispositivo de medición solo puede tomar muestras de $\varphi(t)$ para $t = 1, 2, 3, 4, 5$ (esto correspondería al muestreo a 1Hz durante cinco segundos), esta operación se puede describir mediante una transformación lineal $S : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^5$, definida por

$$S(\varphi) := [\varphi(1) \ \varphi(2) \ \varphi(3) \ \varphi(4) \ \varphi(5)]^T;$$

es decir, S transforma una señal $\varphi(t)$ en un vector de cinco dimensiones que consiste de φ muestreada cinco veces. Por ejemplo,

$$S(t^2) = [1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25]^T$$

$$S(\sqrt{t}) = [\sqrt{1} \ \sqrt{2} \ \sqrt{3} \ \sqrt{4} \ \sqrt{5}]^T$$

etc. (¿Por qué esta aplicación es lineal?)

Ejemplo 1.9 (Interpolación). La interpolación se puede concebir como una especie de inversa del muestreo. Por ejemplo, dados tres números y_1, y_2, y_3 , la fórmula de interpolación de Lagrange nos da un polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(0) = y_1, p(1) = y_2$ y $p(2) = y_3$:

$$p(x) = y_1 \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + y_2 \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + y_3 \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Esta acción se puede interpretar como una transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por $L \left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T \right) := p$. Por ejemplo,

$$L \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T \right) = 3 \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 4 \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 7 \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

1.3. Los prefijos “mono”, “epi”, “iso” + el sufijo “morfismo”.

Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una aplicación de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Se dice que

1. T es *inyectiva* si $T(v_1) = T(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$ cualesquiera sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, o equivalentemente si $T(v_1) \neq T(v_2)$ cada vez que $v_1 \neq v_2$.
2. T es *sobreyectiva* si para todo $w \in \mathbb{W}$ existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $w = T(v)$.
3. T es *biyectiva* si T es inyectiva y sobreyectiva.

Sean $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$. Si $T(v) = w$ se dice que w es la imagen de v por T y que v es imagen inversa de w . El conjunto de todas las imágenes inversas de w por T se denomina la *preimagen de w en \mathbb{V}* y se designa con $T^{-1}(w)$

$$T^{-1}(w) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = w\}.$$

Obsérvese que, de acuerdo con las definiciones anteriores,

- T es inyectiva si, y sólo si, $|T^{-1}(w)| \leq 1$ cualesquiera sea $w \in \mathbb{W}$ (i.e., para cualquier $w \in \mathbb{W}$, la ecuación $T(v) = w$ admite como máximo una solución en \mathbb{V}).
- T es sobreyectiva si, y sólo si, $|T^{-1}(w)| \geq 1$ cualesquiera sea $w \in \mathbb{W}$ (i.e., para cualquier $w \in \mathbb{W}$ la ecuación $T(v) = w$ admite como mínimo una solución en \mathbb{V}).
- T es biyectiva si, y sólo si, $|T^{-1}(w)| = 1$ cualesquiera sea $w \in \mathbb{W}$ (i.e., para cualquier $w \in \mathbb{W}$ la ecuación $T(v) = w$ admite exactamente una solución en \mathbb{V}).

Si $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{V}$, el conjunto de todas las imágenes de elementos de \mathcal{V} por T se designa con $T(\mathcal{V})$

$$T(\mathcal{V}) := \{T(v) : v \in \mathcal{V}\} = \{w \in \mathbb{W} : \text{existe } v \in \mathcal{V} \text{ tal que } w = T(v)\}$$

y se denomina *el conjunto imagen de \mathcal{V} por T* .

Si $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{W}$, el conjunto de todos aquellos elementos de \mathbb{V} cuyas imágenes pertenecen a \mathcal{W} se designa con $T^{-1}(\mathcal{W})$

$$T^{-1}(\mathcal{W}) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) \in \mathcal{W}\}$$

y se denomina *la preimagen de \mathcal{W} en \mathbb{V}* .

Definición 1.10. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Se dice que

1. T es un monomorfismo si T es inyectiva.
2. T es un epimorfismo si T es sobreyectiva.
3. T es un isomorfismo si T es biyectiva.

Definición 1.11. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales. Se dirá que \mathbb{V} es isomorfo a \mathbb{W} si existe un isomorfismo $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ de \mathbb{V} en \mathbb{W} , escribimos entonces $\mathbb{V} \simeq \mathbb{W}$.

1.4. El núcleo y la imagen de una transformación lineal.

Definición 1.12. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . El conjunto $\text{Nu}(T) \subset \mathbb{V}$ definido por

$$\text{Nu}(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0\}$$

se llama el núcleo de T . El conjunto $\text{Im}(T) \subset \mathbb{W}$ definido por

$$\text{Im}(T) := \{w \in \mathbb{W} : \text{existe } v \in \mathbb{V} \text{ tal que } w = T(v)\}$$

se llama la imagen T .

Nota Bene. Nótese que

$$\begin{aligned}\text{Nu}(T) &= T^{-1}(0), \\ \text{Im}(T) &= T(\mathbb{V}).\end{aligned}$$

Proposición 1.13. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} .

- a) $\text{Nu}(T)$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- b) $\text{Im}(T)$ es un subespacio de \mathbb{W} .

Demostración. Utilizaremos una versión sintética del Lema de 3x8.

- a) Sean $v_1, v_2 \in \text{Nu}(T)$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$. Por definición se verifica que

$$\begin{aligned}T(v_1) &= 0 \\ T(v_2) &= 0\end{aligned}$$

y siendo T una transformación lineal

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

lo cual demuestra que $a_1v_1 + a_2v_2 \in \text{Nu}(T)$. Nótese que $T(0) = 0$ implica que $0 \in \text{Nu}(T)$.

- b) Sean $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$. Por definición existen $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que

$$\begin{aligned}w_1 &= T(v_1) \\ w_2 &= T(v_2)\end{aligned}$$

y siendo T una transformación lineal

$$a_1w_1 + a_2w_2 = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = T(a_1v_1 + a_2v_2)$$

lo cual demuestra que $a_1w_1 + a_2w_2 \in \text{Im}(T)$. Nótese que $T(0) = 0$ implica que $0 \in \text{Im}(T)$.

□

Proposición 1.14. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . T es monomorfismo si, y sólo si $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

Demostración.

- Supongamos que T es inyectiva. Sea $v \in \text{Nu}(T)$. Por definición $T(v) = 0$ y como $T(0) = 0$, siendo T inyectiva, se deduce que $v = 0$, lo cual demuestra que $\text{Nu}(T) = \{0\}$.
- Supongamos que $\text{Nu}(T) = \{0\}$ y sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$. Siendo T una transformación lineal se verifica que

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = 0,$$

lo que implica que $v_1 - v_2 \in \text{Nu}(T)$ y como $\text{Nu}(T) = \{0\}$, se deduce que $v_1 = v_2$, lo cual demuestra que T es inyectiva.

□

1.5. Para una caracterización de la imagen.

Proposición 1.15. *Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Si $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de \mathbb{V} , entonces $T(\mathcal{G}) = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es un sistema de generadores de la imagen de T .*

Demostración. Utilizar la definición de $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}$ junto al hecho de que todo vector $v \in \mathbb{V}$ se puede representar en la forma $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ para algunos escalares a_1, a_2, \dots, a_n . La conclusión se obtiene utilizando la propiedad (3):

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ \sum_{j=1}^n a_j T(v_j) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \text{gen} \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.16. *Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} , entonces*

$$\text{Im}(T) = \text{gen}(T(\mathcal{B})).$$

Ejemplo 1.17. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ una matriz de $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} , y sea $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ la transformación lineal inducida por la acción de A sobre \mathbb{K}^n :

$$T_A(x) = Ax.$$

Poniendo la base canónica $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ en el resultado anterior se obtiene que

$$\text{Im}(T_A) = \text{gen}(T(\mathcal{E})) = \text{gen}\{T(e_j) : j \in \mathbb{I}_n\} = \text{gen}\{A_{*j} : j \in \mathbb{I}_n\} = \text{col}(A).$$

Por otra parte,

$$\text{Nu}(T_A) = \{x \in \mathbb{K}^n : T_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} = \text{nul}(A).$$

□

1.6. Resolución de ecuaciones lineales.

Proposición 1.18. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Sea $w \in \text{Im}(T)$ y sea $v_p \in \mathbb{V}$ tal que $T(v_p) = w$. Entonces

$$T^{-1}(w) = v_p + \text{Nu}(T).$$

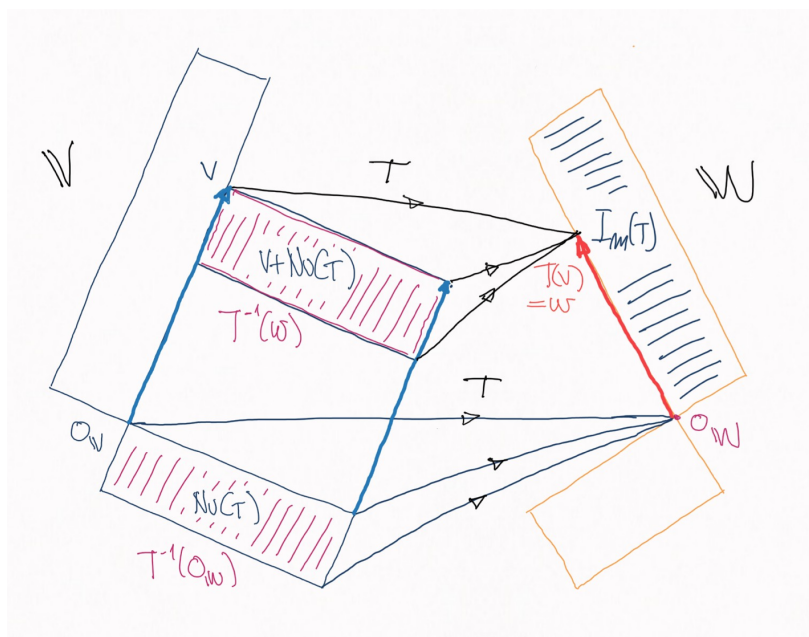


FIGURA 3. Estructura de la solución de una ecuación lineal.

Demostración. Demostrar que $T^{-1}(w) = v_p + \text{Nu}(T)$ es equivalente a demostrar que se satisfacen las siguientes inclusiones

$$T^{-1}(w) \subseteq v_p + \text{Nu}(T)$$

$$v_p + \text{Nu}(T) \subseteq T^{-1}(w)$$

- Sea $v \in \text{Nu}(T)$. Se verifica que

$$T(v_p) = w$$

$$T(v) = 0$$

y siendo T una transformación lineal

$$T(v_p + v) = T(v_p) + T(v) = w + 0 = w$$

en consecuencia $v_p + v \in T^{-1}(w)$, lo cual demuestra que

$$v_p + \text{Nu}(T) \subseteq T^{-1}(w).$$

- Sea $u \in T^{-1}(w)$. Por definición se verifica que

$$T(u) = w$$

$$T(v_p) = w$$

y siendo T una transformación lineal

$$T(u - v_p) = T(u) - T(v_p) = w - w = 0.$$

Entonces, $u - v_p \in \text{Nu}(T)$ y siendo $u = v_p + (u - v_p)$ se verifica que $u \in v_p + \text{Nu}(T)$, lo cual demuestra que

$$T^{-1}(w) \subseteq v + \text{Nu}(T).$$

□

1.7. Ejemplos (2).

Ejemplo 1.19. Si en \mathbb{R}^3 consideramos $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{e_1, e_2\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}\{e_3\}$ tenemos que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$ y que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \left([x_1 \ x_2 \ x_3]^T \right) = [x_1 \ x_2 \ 0]^T.$$

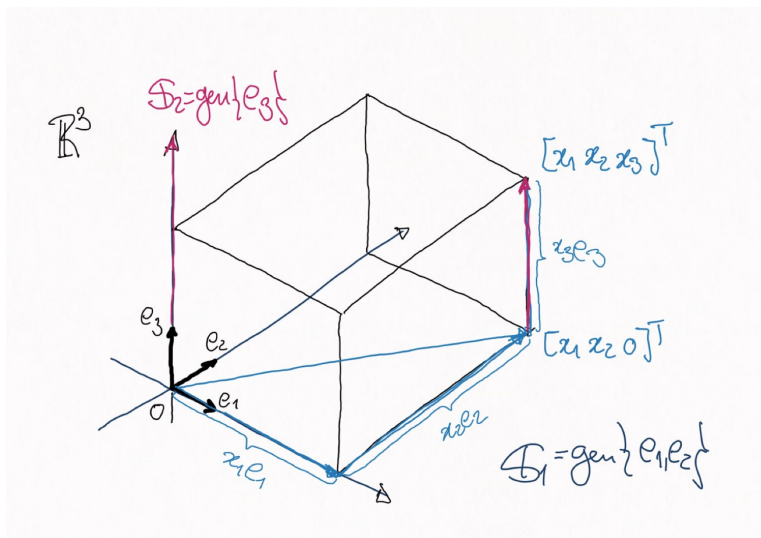


FIGURA 4. Al aplicar la proyección $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ en \mathbb{R}^3 se pierde un grado de libertad (la variabilidad en altitud) y se conservan dos (la variabilidad a ras del suelo).

Ejemplo 1.20 (Proyecciones oblicuas). Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 dos subespacios de \mathbb{V} tales que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$. Consideramos la proyección oblicua sobre \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2 , $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, definida en el **Ejemplo 1.6**. Se tiene

$$\text{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{S}_2,$$

$$\text{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{S}_1.$$

Nota Bene. Nótese que

- $\dim(\text{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})) = \dim(\mathbb{S}_2)$ mide la cantidad de grados de libertad que se pierden al aplicar la proyección,
- $\dim(\text{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})) = \dim(\mathbb{S}_1)$ mide la cantidad de grados de libertad que se retienen al aplicar la proyección.

En los casos extremos:

- $\mathbb{S}_1 = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $\mathbb{S}_2 = \mathbb{V}$, tenemos que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = 0_{\mathbb{V}\mathbb{V}}$ es la transformación nula de \mathbb{V} es sí mismo. En este caso, perdemos todos los grados de libertad y no retenemos ninguno.
- $\mathbb{S}_1 = \mathbb{V}$ y $\mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$, tenemos que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$ es la transformación identidad de \mathbb{V} es sí mismo. En este caso, retenemos todos los grados de libertad y no perdemos ninguno.

□

Ejemplo 1.21. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y sea $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ la transformación lineal definida en el Ejemplo 1.7, se tiene

$$\begin{aligned}\text{Nu}(T_A) &= \text{nul}(A), \\ \text{Im}(T_A) &= \text{col}(A).\end{aligned}$$

Nota Bene. Nótese que en este caso vale que

$$\dim(\text{Nu}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_A)) = \dim(\text{nul}(A)) + \dim(\text{col}(A)) = n.$$

1.8. El teorema de la dimensión.

Introducción. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, donde \mathbb{V} es de dimensión finita. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . *Grosso modo*, la dimensión del núcleo de T mide cuántos grados de libertad se pierden cuando se aplica T , mientras que la dimensión de su imagen mide cuántos grados de libertad se conservan. Como el espacio vectorial de partida tiene originalmente $\dim(\mathbb{V})$ grados de libertad, no debería sorprendernos la veracidad de la siguiente relación: $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$.

Teorema 1.22 (Teorema de la dimensión). *Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, donde \mathbb{V} es de dimensión finita. Si $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} , entonces*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Comentario. La demostración es constructiva y proporciona un método para analizar el comportamiento de las transformaciones lineales con dominios de dimensión finita. A grandes rasgos, el problema se descompone en los siguientes pasos:

Paso 1: Elegir una base \mathcal{B}_0 del núcleo de T .

Paso 2: Extender \mathcal{B}_0 a una base \mathcal{B} de \mathbb{V} (el dominio de T):

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1,$$

donde \mathcal{B}_1 es un conjunto de $\dim(\mathbb{V}) - |\mathcal{B}_0|$ vectores linealmente independientes que no pertenecen al núcleo de T .

Paso 3: Comprobar que $T(\mathcal{B}_1) = \{T(v) : v \in \mathcal{B}_1\}$ es una base de la imagen de T . Esta tarea se realiza en dos etapas:

- a) Comprobando que $T(\mathcal{B}_1)$ genera $\text{Im}(T)$.
- b) Comprobando que $T(\mathcal{B}_1)$ es linealmente independiente.

Paso 4: Observar que $|\mathcal{B}_0| + |T(\mathcal{B}_1)| = \dim(\mathbb{V})$.

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 1.23 (Isomorfismos). *Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, ambos de dimensión finita n y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) T es un isomorfismo.
- (2) T es un monomorfismo.
- (3) T es un epimorfismo.

Demostración. Como $\dim(\mathbb{V}) = n$, por el Teorema 1.22 sabemos que

$$n = \dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T \text{ es un monomorfismo} &\iff \text{Nu}(T) = \{0\} \\ &\iff \dim(\text{Nu}(T)) = 0 \\ &\iff \dim(\text{Im}(T)) = n = \dim(\mathbb{W}) \\ &\iff \text{Im}(T) = \mathbb{W} \\ &\iff T \text{ es un epimorfismo.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las afirmaciones (2) y (3) son equivalentes. Si la afirmación (1) es verdadera, entonces las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas por la definición de isomorfismo. Si alguna de las afirmaciones (2) o (3) es verdadera, entonces ambas son verdaderas, y luego (1) es verdadera. Esto completa la demostración. □

1.9. Método para resolver ecuaciones lineales.

Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Supongamos que $\dim(\mathbb{V}) = n$, que $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ es una base del núcleo de T , y que $\mathcal{B}_1 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente tal que $\mathcal{B}_1 \cap \text{Nu}(T) = \emptyset$. Esta información es suficiente para resolver la ecuación $T(v) = w$ para cualquier $w \in \text{Im}(T)$.

Como $\text{Im}(T) = \text{gen}\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ y el conjunto $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente existen únicos escalares a_{k+1}, \dots, a_n tales que

$$w = \sum_{i=k+1}^n a_i T(v_i).$$

Esto significa que

$$v_p = \sum_{i=k+1}^n a_i v_i$$

es una solución particular de la ecuación $T(v) = w$. Se concluye que

$$T^{-1}(w) = v_p + \text{Nu}(T) = \sum_{i=k+1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^k x_i v_i,$$

donde $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$.

□