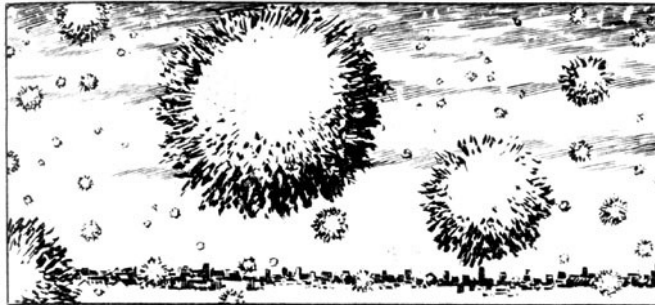

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 29 DE SEPTIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Transformaciones lineales	2
1.1. Ejemplos (3)	2
1.2. “Parece que las transformaciones lineales tienen poca imaginación”	3
2. Transformaciones lineales sobre dominios de dimensión finita	5
2.1. Condiciones de existencia sobre un sistema de generadores	5
2.2. Extensiones lineales	7
2.3. Construcción de una extensión a partir de una base	7
2.4. Caracterización por restricción a una base	9

1. TRANSFORMACIONES LINEALES

1.1. Ejemplos (3).

Ejemplo 1.1 (Combinaciones lineales). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, y sea $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de \mathbb{V} . La aplicación $\Lambda_{\mathcal{V}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{V}$ definida por

$$\Lambda_{\mathcal{V}} \left([x_1 \ \cdots \ x_n]^T \right) := \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

es una transformación lineal de \mathbb{K}^n en \mathbb{V} .

En efecto, si escribimos $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$, $y = [y_1 \ \cdots \ y_n]^T$, $a \in \mathbb{K}$ y utilizamos las propiedades distributivas y asociativas que correspondan obtenemos que

$$\Lambda_{\mathcal{V}}(ax + y) = \sum_{j=1}^n (ax_j + y_j)v_j = a \sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j v_j = a\Lambda_{\mathcal{V}}(x) + \Lambda_{\mathcal{V}}(y).$$

Nótese que la imagen de $\Lambda_{\mathcal{V}}$ es el subespacio generado por el conjunto \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Lambda_{\mathcal{V}}) &= \Lambda_{\mathcal{V}}(\mathbb{K}^n) = \{ \Lambda_{\mathcal{V}}(x) : x \in \mathbb{K}^n \} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n x_j v_j : [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{K}^n \right\} = \text{gen}(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

En consecuencia, $\Lambda_{\mathcal{V}}$ es un epimorfismo si, y sólo si, el conjunto \mathcal{V} es un sistema de generadores de \mathbb{V} .

Nótese que el núcleo de $\Lambda_{\mathcal{V}}$ es el subespacio

$$\text{Nu}(\Lambda_{\mathcal{V}}) = \{ x \in \mathbb{K}^n : \Lambda_{\mathcal{V}}(x) = 0 \} = \left\{ [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^n x_j v_j = 0 \right\}.$$

En consecuencia, $\Lambda_{\mathcal{V}}$ es un monomorfismo si, y sólo si, el conjunto \mathcal{V} es linealmente independiente.

Nótese también que $\Lambda_{\mathcal{V}}$ es un isomorfismo si, y sólo si, el conjunto \mathcal{V} es una base de \mathbb{V} . \square

Ejemplo 1.2 (Isomorfismo de coordenadas). Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} . La aplicación $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ que a cada vector $v \in \mathbb{V}$ le asigna su vector de coordenadas en la base \mathcal{B}

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v) := [v]^{\mathcal{B}} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T, \text{ si } v = \sum_{j=1}^n x_j v_j, \text{ con } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K},$$

es una transformación lineal.

En efecto, si escribimos $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$, $a \in \mathbb{K}$ y utilizamos las propiedades distributivas y asociativas que correspondan obtenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{B}}(av + w) &= \Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=1}^n (ax_j + y_j)v_j\right) = [ax_1 + y_1 \quad \cdots \quad ax_n + y_n]^T \\ &= a[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T + [y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T = a\Phi_{\mathcal{B}}(v) + \Phi_{\mathcal{B}}(w).\end{aligned}$$

Nótese que la imagen de $\Phi_{\mathcal{B}}$ es \mathbb{K}^n ,

$$\text{Im}(\Phi_{\mathcal{B}}) = \text{gen}\{\Phi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})\} = \text{gen}\{\Phi_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(v_n)\} = \text{gen}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{K}^n.$$

En consecuencia, dado que \mathbb{V} y \mathbb{K}^n tienen la misma dimensión, podemos concluir que $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo.

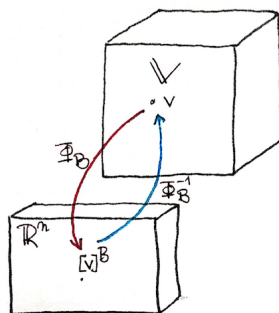


FIGURA 1. Isomorfismo de coordenadas en un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n . Nótese que $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = \Lambda_{\mathcal{B}}$.

□

1.2. “Parece que las transformaciones lineales tienen poca imaginación”.

Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sea $\mathcal{V} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_k\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de k puntos de \mathbb{V} . Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal convexa* de elementos de \mathcal{V} si $v = \sum_{j=1}^k p_j v_j$ para algunos $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

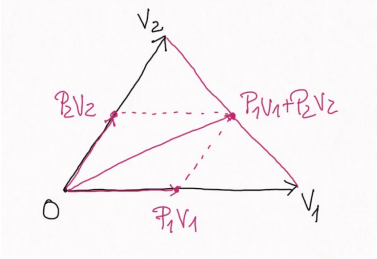


FIGURA 2. Combinaciones lineales convexas de $\{v_1, v_2\}$. Los puntos de la forma $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$, con $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ constituyen los puntos del segmento de recta que unen a los puntos v_1 y v_2 . En el ejemplo, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

El conjunto $C(\mathcal{V})$ de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de \mathcal{V}

$$C(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{j=1}^k p_j v_j : p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \sum_{j=1}^k p_j = 1 \right\}$$

se llama la *cápsula convexa* del conjunto \mathcal{V} .

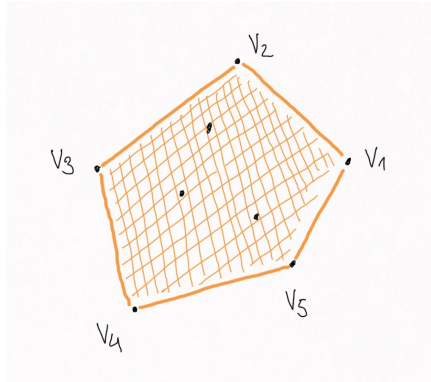


FIGURA 3. Forma de la cápsula convexa $C(\mathcal{V})$ de un conjunto de puntos \mathcal{V} contenidos en un plano: se trata de la región encerrada por un polígono cuyos vértices son algunos de los puntos de \mathcal{V} .

Usando que

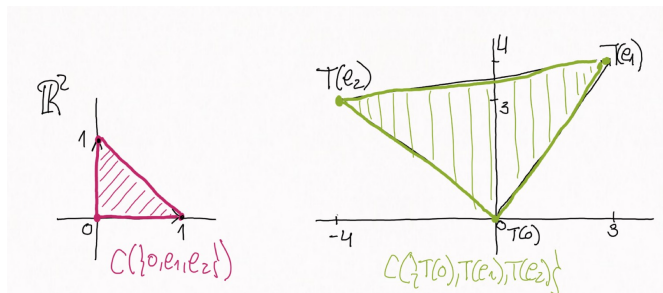
$$T \left(\sum_{j=1}^k p_j v_j \right) = \sum_{j=1}^k p_j T(v_j)$$

se comprueba inmediatamente que si $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces

$$T(C(\mathcal{V})) = C(T(\mathcal{V})).$$

En palabras, *la imagen de la cápsula convexa del conjunto \mathcal{V} por cualquier transformación lineal T es la cápsula convexa de la imagen de \mathcal{V} por T .*

Ejemplo 1.3. La imagen del triángulo de vértices $0, e_1, e_2$ por la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 & 4x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}^T$, es el triángulo de vértices $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}^T$.



2. TRANSFORMACIONES LINEALES SOBRE DOMINIOS DE DIMENSIÓN FINITA

En toda esta sección \mathbb{V} será un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita y \mathbb{W} será un \mathbb{K} -espacio vectorial cualquiera.

2.1. Condiciones de existencia sobre un sistema de generadores.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema de generadores de \mathbb{V} . En lo que sigue vamos a estudiar el siguiente problema: *dados w_1, \dots, w_n en \mathbb{W} , ¿cuáles son las condiciones que tienen que satisfacerse para que exista una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, tal que $T(v_j) = w_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$?*

Nótese que si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ son tales que $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ y si existe una transformación lineal T con las propiedades requeridas debe verificarse que $\sum_{j=1}^n a_j w_j = 0$. ¿Por qué? Porque si T es una transformación lineal vale que

$$0 = T(0) = T\left(\sum_{j=1}^n a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n a_j w_j.$$

Recíprocamente, si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ y si

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_j v_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j w_j = 0,$$

entonces, de

$$(2) \quad v = \sum_{j=1}^n a_j v_j = \sum_{j=1}^n b_j v_j, \text{ resulta } 0 = \sum_{j=1}^n (a_j - b_j) v_j$$

por lo que

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_j - b_j) w_j, \text{ o sea } \sum_{j=1}^n a_j w_j = \sum_{j=1}^n b_j w_j.$$

Es decir, aun cuando v pudiera tener distintas representaciones como combinación lineal de los generadores v_j , como muestra (2), el valor $\sum_{j=1}^n a_j w_j$ no depende de las mismas, por lo que

$$T : \sum_{j=1}^n a_j v_j \mapsto \sum_{j=1}^n a_j w_j$$

define una aplicación de $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$. Se verifica fácilmente que T es una transformación lineal y además $T(v_j) = w_j$. En definitiva, *la condición necesaria y suficiente para que exista una transformación lineal T de \mathbb{V} to \mathbb{W} tal que $T(v_j) = w_j$ está dada por (1).*

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{V} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ un sistema de generadores de \mathbb{V} y sea $\mathcal{W} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ un subconjunto de \mathbb{W} . Existe una transformación lineal T de \mathbb{V} to \mathbb{W} tal que $T(v_j) = w_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$ si, y sólo si,*

$$\text{Nu}(\Lambda_{\mathcal{V}}) \subseteq \text{Nu}(\Lambda_{\mathcal{W}}).$$

En tal caso la aplicación $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ definida por

$$T \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j \right) := \sum_{j=1}^n x_j w_j,$$

es una transformación lineal y satisface que $T(v_j) = w_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.

Ejemplo 2.2. Analizar si existe una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 tal que

$$\begin{aligned} [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [4 \ 3 \ 2]^T, & [-2 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 1 \ 1]^T, \\ [1 \ -2 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 1]^T, & [2 \ 5 \ 3]^T &\mapsto [1 \ 4 \ 0]^T. \end{aligned}$$

En este caso la condición necesaria y suficiente para la existencia de una transformación lineal con esas propiedades se reduce a comprobar que los espacios nulos de las siguientes matrices son iguales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuentas al margen, se obtiene que

$$\text{nul}(A) = \text{gen} \left\{ [-10 \ -1 \ 2 \ 3]^T \right\}$$

y que

$$\text{nul}(B) = \text{gen} \left\{ [3 \ 1 \ -7 \ 1]^T \right\}.$$

Como $\text{nul}(A) \neq \text{nul}(B)$ no existe ninguna transformación lineal que tenga esas propiedades. \square

Ejemplo 2.3. Analizar si existen $a, b \in \mathbb{R}$ que hagan posible la existencia de una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 tal que

$$\begin{aligned} [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [4 \ 3 \ 2]^T, & [-2 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [a \ 1 \ b]^T, \\ [1 \ -2 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 1]^T, & [2 \ 5 \ 3]^T &\mapsto [1 \ 4 \ 0]^T. \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para la existencia de una transformación lineal con esas propiedades significa que los espacios nulos de las siguientes matrices tienen que ser iguales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & a & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & b & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\text{nul}(A) = \text{gen} \{x_0\}$ con $x_0 = [-10 \ -1 \ 2 \ 3]^T$, a y b tienen que ser solución del sistema de ecuaciones $Bx_0 = 0$. De aquí se deduce que no existen valores de a y b para los que exista la transformación lineal requerida porque $x_0 \notin \text{nul}(B)$, debido a que $-15 \neq 0$. \square

2.2. Extensiones lineales.

Restricciones y extensiones. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación de \mathbb{V} en \mathbb{W} y sea $\mathcal{V} \subset \mathbb{V}$ un subconjunto de \mathbb{V} . Se llama *restricción de T a \mathcal{V}* a la aplicación $T|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{W}$ definida por

$$T|_{\mathcal{V}}(v) := T(v) \text{ para todo } v \in \mathcal{V}.$$

Sea $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación de \mathcal{V} en \mathbb{W} . Se dice que T es una *extensión de L a \mathbb{V}* si $T|_{\mathcal{V}} = L$. En otras palabras, T es una extensión de L a \mathbb{V} si, y sólo si, L es la restricción de T a \mathcal{V} .

Definición 2.4. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales. Sean $\mathcal{V} \subset \mathbb{V}$ un subconjunto de \mathbb{V} y $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una aplicación de \mathcal{V} en \mathbb{W} . Una extensión lineal de L a \mathbb{V} es cualquier transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que L es la restricción de T a \mathcal{V} .

2.3. Construcción de una extensión a partir de una base.

Fijamos una base $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{V} y una aplicación $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{W}$ de \mathcal{B} en \mathbb{W} . En estas condiciones se puede construir una única extensión lineal de L a \mathbb{V} .

Para comenzar, examinamos qué significa la última oración. Una extensión lineal de L a \mathbb{V} es una aplicación $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ que posee las siguientes propiedades:

1. $T|_{\mathcal{B}} = L$. Esto significa que $T(v_j) = L(v_j)$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.
2. T es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} ,

La unicidad de la extensión lineal significa que si T_1, T_2 son dos de esas extensiones, entonces $T_1 = T_2$. Establecido el significado del asunto, comencemos la construcción.

Razonamiento y receta. Como $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de \mathbb{V} , sabemos que todo vector $v \in \mathbb{V}$ admite una descomposición de la forma

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j,$$

donde los coeficientes $x_j = x_j(v) \in \mathbb{K}$ están unívocamente determinados por el vector v . Como hay una única manera de escribir $v \in \mathbb{V}$ en la forma $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, no hay ambigüedad al definir

$$(3) \quad T(v) := \sum_{j=1}^n x_j L(v_j).$$

Este procedimiento define una extensión lineal T de L a \mathbb{V} . En efecto,

1. $T|_{\mathcal{B}} = L$.

Esto es así porque para cada $k \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$x_j(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} =: \delta_{jk}$$

y entonces

$$T(v_k) = \sum_{j=1}^n x_j(v_k) L(v_j) = \sum_{j=1}^n \delta_{jk} L(v_j) = L(v_k) \text{ para todo } k \in \mathbb{I}_n.$$

2. T es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} .

Esto es así porque si

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j \quad \text{y} \quad u = \sum_{j=1}^n y_j v_j,$$

entonces

$$av + u = \sum_{j=1}^n (ax_j + y_j)v_j \quad \text{para todo } a \in \mathbb{K},$$

y también

$$\begin{aligned} T(av + u) &= \sum_{j=1}^n (ax_j + y_j)L(v_j) = a \sum_{j=1}^n x_j L(v_j) + \sum_{j=1}^n y_j L(v_j) \\ &= aT(v) + T(u). \end{aligned}$$

Por último, comprobamos la unicidad de la extensión. Supongamos que T_1, T_2 son dos de tales extensiones. Consideramos

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

y observamos que

$$T_1(v) = T_1 \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j T_1(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(v_j)$$

Como el mismo cálculo también vale $T_2(v)$, se concluye $T_1(v) = T_2(v)$ para todos $v \in \mathbb{V}$. Por lo tanto, la extensión lineal T definida en (3) es única. \square

Ejemplo 2.5 (El caso más simple). Fijamos una base $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{K}^n y una colección cualquiera de vectores $\mathcal{W} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{K}^m , la única transformación lineal T de \mathbb{K}^n en \mathbb{K}^m tal que $T(v_j) = w_j$ es

$$T(x) = [\mathcal{W}][\mathcal{B}]^{-1}x$$

donde $[\mathcal{W}] = [w_1 \ \cdots \ w_n]$ y $[\mathcal{B}] = [v_1 \ \cdots \ v_n]$.

¿Por qué? Porque si $A_T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es la matriz tal que

$$T(x) = A_T x$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$A_T[\mathcal{B}] = [\mathcal{W}].$$

Pero la matriz $[\mathcal{B}]$ es inversible porque $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de \mathbb{K}^n . Por lo tanto,

$$A_T = [\mathcal{W}][\mathcal{B}]^{-1}.$$

Nota Bene. Nótese que

$$[\mathcal{B}]^{-1}x = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}x = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}x = [x]^{\mathcal{B}}.$$

De aquí se deduce que

$$T(x) = [\mathcal{W}][x]^{\mathcal{B}}.$$

Ejemplo 2.6. Construir la transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que satisface que

$$\begin{aligned} [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [4 \ 3 \ 2]^T, \\ [-2 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 1 \ 1]^T, \\ [1 \ -2 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 1]^T. \end{aligned}$$

De acuerdo con el resultado del ejemplo anterior tenemos que

$$T(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} x.$$

2.4. Caracterización por restricción a una base.

¿Cómo utilizar una base para especificar una transformación lineal? Fijamos $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base de \mathbb{V} y consideramos una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$. Como cada $v \in \mathbb{V}$ determina unívocamente su vector de coordenadas en base \mathcal{B} , $[v]^{\mathcal{B}} = [a_1 \ \cdots \ a_n]^T$, de la linealidad de T se deduce que

$$T(v) = \sum_{j=1}^n a_j T(v_j).$$

Método práctico. Nótese que si se conoce el conjunto $\{T(v_j) : j \in \mathbb{I}\}$, el argumento anterior proporciona un método práctico para determinar la imagen por T de cualquier vector $v \in \mathbb{V}$. Concretamente, dado $v \in \mathbb{V}$ se trata de realizar las siguientes tareas

1. Resolver la ecuación $\sum_{j=1}^n x_j v_j = v$ en \mathbb{K}^n . La única solución de esta ecuación es el vector de coordenadas de v en la base \mathcal{B}

$$[v]^{\mathcal{B}} = [a_1 \ \cdots \ a_n]^T.$$

2. Determinar $T(v)$ realizando la combinación lineal $\sum_{j=1}^n a_j T(v_j)$.

Para resumir, hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 2.7. Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, \mathbb{V} de dimensión finita, y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} . Entonces, la restricción de T a cualquier base \mathcal{B} de \mathbb{V} determina unívocamente a T .