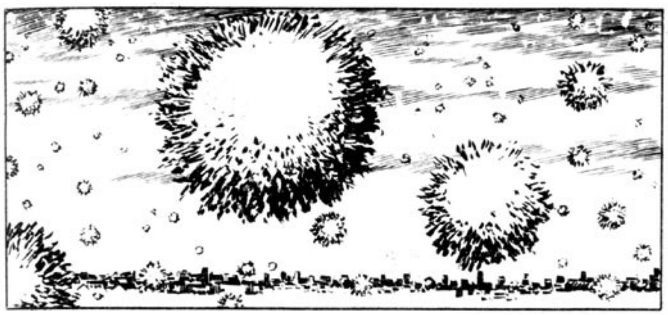
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 6 DE OCTUBRE

Sebastian GRYNBERG



El único héroe válido es el héroe "en grupo",
nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Proyecciones y simetrías

En todo lo que sigue $\mathbb{V}$ será un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita.

1.1. Introducción.

El punto de partida será una descomposición del espacio vectorial como suma directa de dos subespacios suplementarios: $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$. Cada vector $v \in \mathbb{V}$ se descompone de manera única en dos sumandos, su componente respecto de $\mathbb{S}_1$ y su componente respecto de $\mathbb{S}_2$. Esto es, para cada $v \in \mathbb{V}$, existen únicos $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$ (que dependen de v) tales que

$$v = v_1 + v_2.$$

Esta unicidad de la descomposición de cada vector v nos permite construir cuatro transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en sí mismo:

1. *la proyección de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$, definida por
$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1;$$
2. *la proyección de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}_2$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_1$, definida por
$$\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2;$$
3. *la simetría de* $\mathbb{V}$ *con respecto a* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$, definida por
$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1 - v_2;$$
4. *la simetría de* $\mathbb{V}$ *con respecto a* $\mathbb{S}_2$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_1$, definida por
$$\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2 - v_1.$$

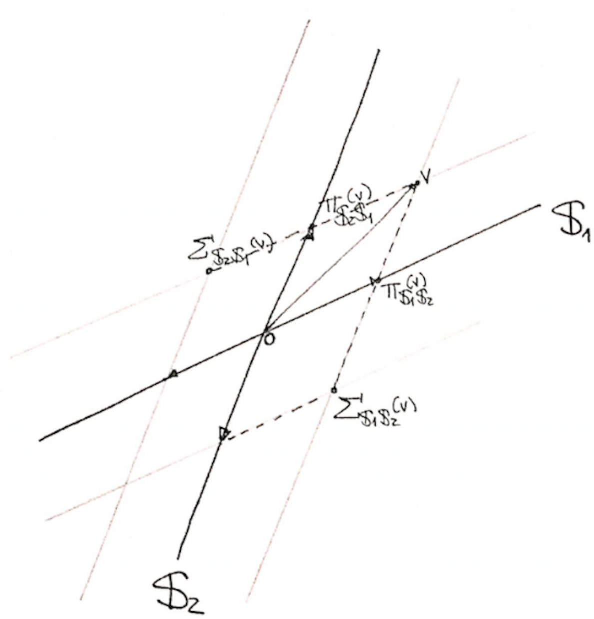


Figura 1. Proyecciones y simetrías inducidas por la descomposición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$

Ejemplo 1.1. $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}^T\right\}$, con $\theta \in (0, \pi)$.

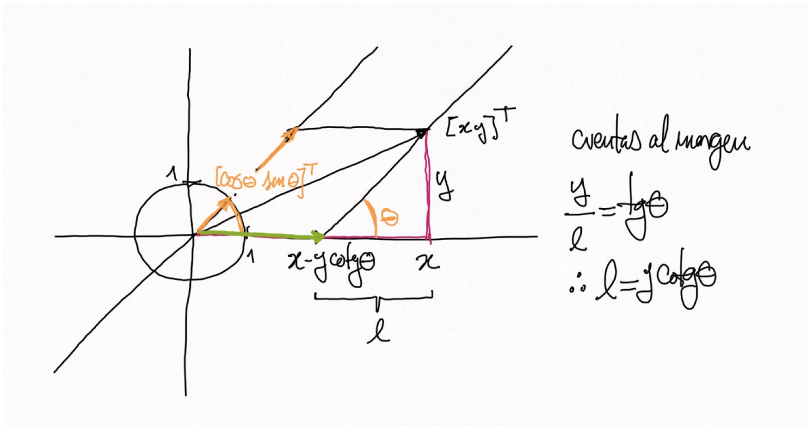


FIGURA 2. Proyección del plano sobre el eje de las abscisas en la dirección de la recta $y = (\tan\theta)\, x$.

En este ejemplo una política geométrica permite concluir que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x - y\cot\theta\\ 0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

El mismo resultado se obtiene siguiendo al pie de la letra el procedimiento enunciado en la definición:

Paso 1. Representar a cada vector $v \in \mathbb{R}^2$ en la forma

$$v = v_1 + v_2,$$

con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.

Paso 2. Suprimir la componente de v perteneciente a $\mathbb{S}_2$ y conservar la componente de v perteneciente a $\mathbb{S}_1$ para obtener

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = v_1.$$

En este ejemplo, ejecutar el primer paso requiere que se resuelva la ecuación

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \cos\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}.$$

La resolvemos y obtenemos los valores de las incognitas a y b en función de las componentes del $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^T$,

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \cos\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\begin{bmatrix}\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\cot\theta\\ 0 & \operatorname{cosec}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

de donde resulta que $a = x - y\cot\theta$ y $b = y\operatorname{cosec}\theta$. De aquí que la descomposición que exige el primer paso sea

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x - y\cot\theta\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y\cot\theta\\ y\end{bmatrix}.$$

Finalmente, suprimimos la segunda componente y obtenemos la expresión (1). $\square$

El orden de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ altera la definición de $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. De hecho, $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \neq \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$. Además, la elección del suplemento de $\mathbb{S}_1$ también produce una diferencia: si $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 \oplus \tilde{\mathbb{S}}_2$ con $\mathbb{S}_2 \neq \tilde{\mathbb{S}}_2$, entonces $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \neq \Pi_{\mathbb{S}_1\tilde{\mathbb{S}}_2}$.

Ejemplo 1.2. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{S}_1 = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T\right\}$ es el subespacio de las matrices simétricas y $\mathbb{S}_2 = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^T\right\}$ el de las matrices antisimétricas.

Primero vamos a demostrar que $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

$\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. En efecto, cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se descompone en la forma

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\in\mathbb{S}_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\in\mathbb{S}_2}. \tag{2}$$

$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0\}$. En efecto, si $A \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$, entonces $A = A^T$ y $A = -A^T$. De $A^T = -A^T$ se deduce que $2A^T = 0$ y por lo tanto, $A = 0$.

De la representación (2) se deduce que la proyección de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sobre $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$ es

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T);$$

la proyección de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sobre $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$ es

$$\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(A) = \frac{1}{2}(A - A^T);$$

la simetría de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con respecto a $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$ es

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) - \frac{1}{2}(A - A^T) = A^T;$$

la simetría de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con respecto a $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$ es

$$\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(A) = \frac{1}{2}(A - A^T) - \frac{1}{2}(A + A^T) = -A^T.$$

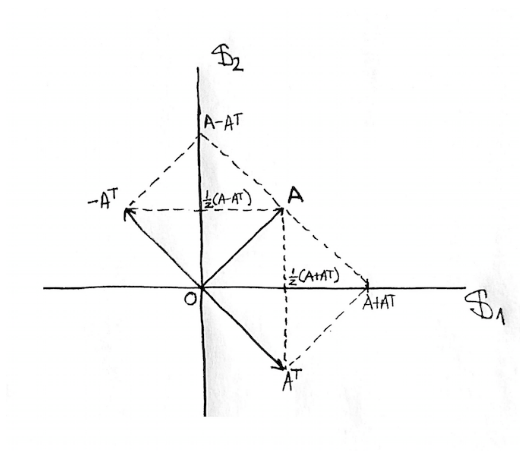


FIGURA 3. Proyecciones y simetrías inducidas por la descomposición de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en partes simétricas y antisimétricas.

□

Comentario al margen. La base canónica de $\mathbb{R}^{n\times n}$ está compuesta por n^2 matrices que tienen el siguiente aspecto

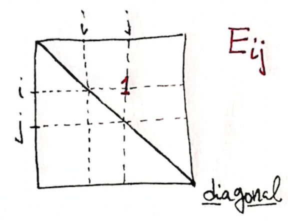


Figura 4. Matriz E_{ij} de la base canónica de $\mathbb{R}^{n\times n}$ con índices i, j tales que $1 \leq i < j \leq n$. Para este tipo de matrices el coeficiente 1 aparece por encima de la diagonal.

Nótese que

$$\mathcal{B}_1 = \{E_{ij} + E_{ji} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

es una base del subespacio de todas las matrices simétricas y que

$$\mathcal{B}_2 = \{E_{ij} - E_{ji} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

es una base del subespacio de todas las matrices antisimétricas.

Para contar la cantidad de elementos de cada una de esas bases utilizaremos el siguiente artefacto geométrico-aritmético

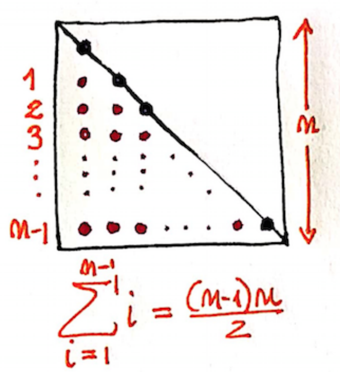


Figura 5. Se observa que $|\mathcal{B}_1| = \frac{(n-1)n}{2} + n$ y $|\mathcal{B}_2| = \frac{(n-1)n}{2}$.

1.2. Propiedades.

Nota Bene. Nótese que valen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} &= \mathrm{I}_{\mathbb{V}},\\
\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} &= 0_{\mathbb{V}^{\mathbb{V}}},\\
\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} &= \mathrm{I}_{\mathbb{V}},\\
\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} + 2\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} &= \mathrm{I}_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

Esto significa que la acción de una de las cuatro transformaciones determina cómo actúan las restantes. Por ejemplo, dados v y $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) &= v - \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v),\\ \Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) &= v - 2\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v),\\ \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) &= 2\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) - v.\end{aligned}$$

Lema 1.3. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ *es la única transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{V}$ *tal que*

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & si\ v \in \mathbb{S}_1,\\ 0 & si\ v \in \mathbb{S}_2.\end{cases} \tag{3}$$

2. $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. (Idempotencia)

Demostración. Suponemos que $\dim(\mathbb{V}) = n$. Elegimos $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base de $\mathbb{S}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{S}_2$. Por definición,

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{si } j \in \{1, \dots, k\},\\ 0 & \text{si } j \in \{k+1, \dots, n\}.\end{cases}$$

Como la restricción de una transformación lineal T a una base $\mathcal{B}$ determina univocamente a T, cualquier $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ que satisfaga (3) debe coincidir con $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. La idempotencia es inmediata por definición, escribimos $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$ y operamos

$$\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = (\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \circ \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})(v) = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}\left(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)\right) = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1) = v_1 = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v).$$

□

Lema 1.4. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ *es la única transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{V}$ *tal que*

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & si\ v \in \mathbb{S}_1,\\ -v & si\ v \in \mathbb{S}_2,\end{cases} \tag{4}$$

2. $\Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$. (Involución)

Demostración. Ejercicio. □

1.3. Forma canónica de las representaciones matriciales.

Lema 1.5. *Si* $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$*, donde* $\dim(\mathbb{V}) = n$*,* $\dim(\mathbb{S}_1) = k$ *y* $\dim(\mathbb{S}_2) = n - k$*,* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ *es una base de* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ *es una base de* $\mathbb{S}_2$*, entonces* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ *es una base de* $\mathbb{V}$ *tal que*

$$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)}\\ 0_{(n-k)\times k} & 0_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix},$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)}\\ 0_{(n-k)\times k} & -I_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}$$

Demostración. Se deduce inmedatamente de (3) y (4). □

1.4. Caracterización algebraica.

Lema 1.6. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(T)$.*

Demostración. Tenemos que comprobar dos puntos

1. $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nu}(T)$.
2. $$T(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathrm{Im}(T), \\ 0 & \text{si } v \in \mathrm{Nu}(T). \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que la identidad $\mathrm{I}_{\mathbb{V}} = T + (\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - T)$, implica que todo $v \in \mathbb{V}$ se puede descomponer en la forma

$$v = T(v) + (v - T(v)).$$

Ahora observamos que la propiedad $T^2 = T$ implica que $v - T(v) \in \mathrm{Nu}(T)$:

$$T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = 0.$$

El argumento anterior nos permite concluir que

$$\mathbb{V} = \mathrm{Im}(T) + \mathrm{Nu}(T).$$

Para completar la prueba del primer punto tenemos que comprobar que

$$\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nu}(T) = \{0\}.$$

Consideramos $v \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nu}(T)$. Tenemos que $v = T(u)$ para algún $u \in \mathbb{V}$ y que $T(v) = 0$. Como $T(v) = T^2(u) = T(u) = v$ y $T(v) = 0$, se concluye que $v = 0$.

Notar que también comprobamos que si $v \in \mathrm{Im}(T)$, entonces $T(v) = v$, y como $T(v) = 0$ para todo $v \in \mathrm{Nu}(T)$, el segundo punto también quedó demostrado. □

Lema 1.7. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$.*

Demostración. Usando que $T = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} \circ T = T \circ \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$ se puede comprobar que

$$S^2 = (\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2T)^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 4T + 4T^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}.$$

□

Lema 1.8. *Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$. En otras palabras, T es una proyección.*

Demostración. Usando que $S = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} \circ S = S \circ \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$ se puede comprobar que

$$T^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2S + S^2\right) = \frac{1}{4}(2\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2S) = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S) = T.$$

□

Lema 1.9. *Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathrm{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ en la dirección de $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$.*

Demostración. Como $T = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ es una proyección tenemos que

$$\mathbb{V} = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S) \oplus \mathrm{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S).$$

Tiene sentido hablar de la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathrm{Nu}\,(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ en la dirección de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$.

Esta claro que si $v \in \mathrm{Nu}\,(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$, entonces $S(v) = v$. Si $v \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$, entonces

$$v = w - S(w)$$

para algún $w \in \mathbb{V}$ y de aquí se deduce que

$$S(v) = S(w) - S^2(w) = S(w) - w = -v$$

□

Nota Bene. Nótese que en las condiciones del Lema anterior vale que

$$\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S) \oplus \mathrm{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} + S).$$

Ejemplo 1.10. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = Ax$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Como $A^2 = A$, T es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{col}(A)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{nul}(A)$.

Como la forma escalonada por filas reducida de A es

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$\mathrm{col}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$$

y que

$$\mathrm{nul}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Nótese que si $\mathcal{B}$ es la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

2. Rotaciones y simetrías axiales en el plano

2.1. Rotaciones.

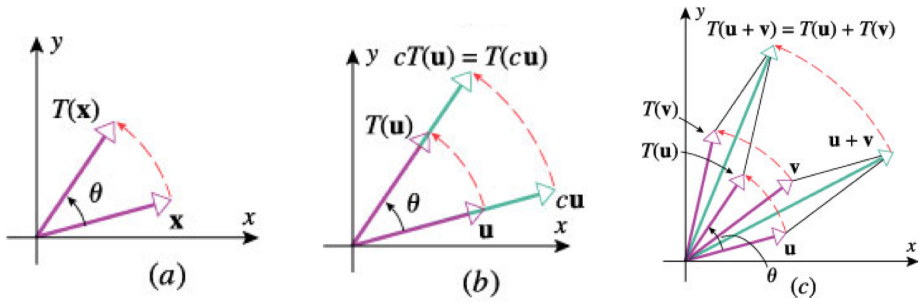


Figura 6. (a) Rotación de ángulo θ alrededor del origen en contra de las agujas del reloj. (b) Homogeneidad. (c) Aditividad.

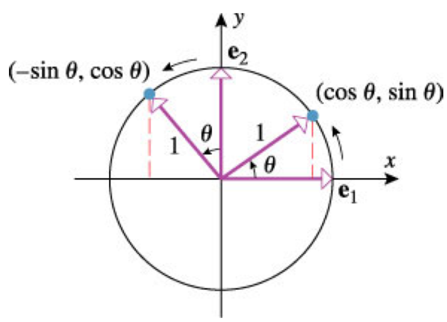


Figura 7. Acción de la rotación R_θ sobre la base la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Nota bene. Nótese que la acción de la rotación R_θ sobre cualquier vector $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ se puede describir de la siguiente manera:

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} R_\theta(e_1) & R_\theta(e_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

2.2. Simetrías.

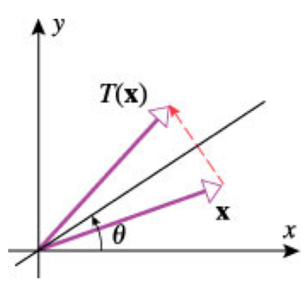


Figura 8. Simetría alrededor de la recta de ángulo θ con respecto del eje x.

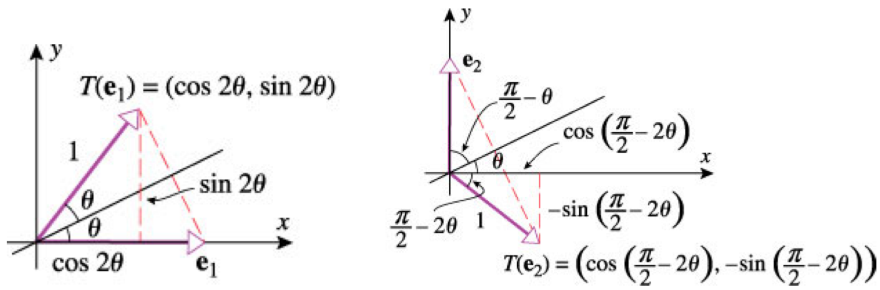


Figura 9. Acción de la simetría sobre la base la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Nota bene. Recordando que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha),$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha),$$

se puede ver que la acción de la simetría sobre cualquier vector $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ se puede describir de la siguiente manera:

$$S_{2\theta}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} S_{2\theta}(e_1) & S_{2\theta}(e_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

2.3. Pequeña tabla trigonométrica.

	Radianes	Grados sexagesimales	seno	coseno
	0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
	$\frac{1}{6}\pi$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\frac{1}{4}\pi$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\frac{1}{3}\pi$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}\pi$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

3. Rotaciones en el espacio

3.1. Definición geométrica.

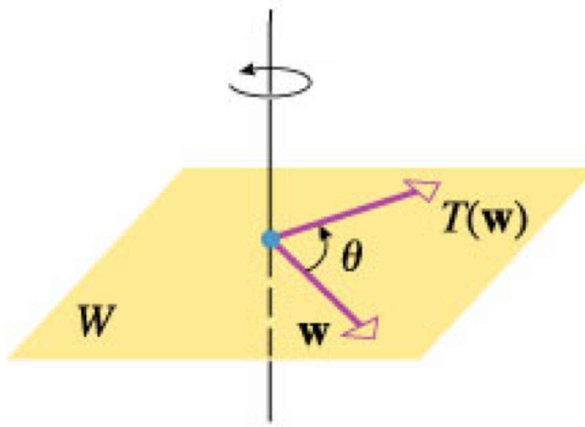


Figura 10. Rotación de ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de un eje de rotación que pasa por el origen. Aquí W es el plano perpendicular al eje de rotación que pasa por el origen. Notar que T rota a cada vector $w \in W \setminus \{0\}$ en un ángulo θ transformándolo en el vector $T(v)$ que también pertenece a W.

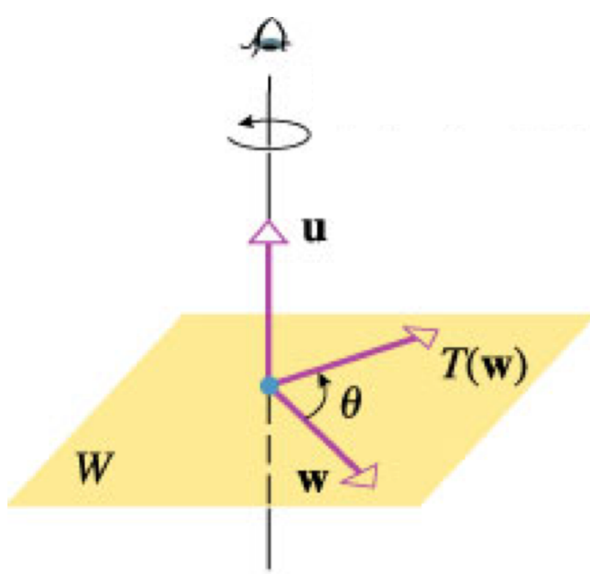


Figura 11. La orientación del eje de rotación está dada por $u = w \times T(w)$.

3.2. Rotaciones alrededor de los ejes coordenados.

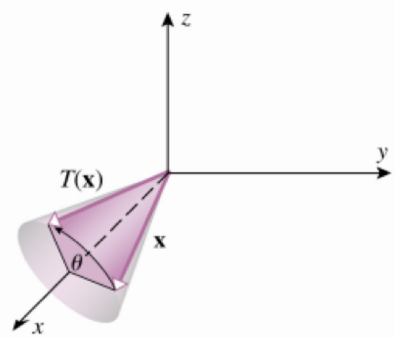
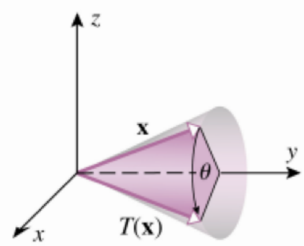
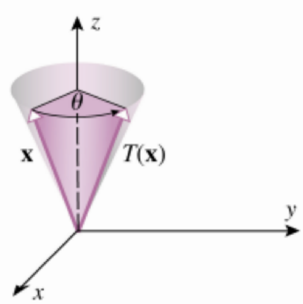
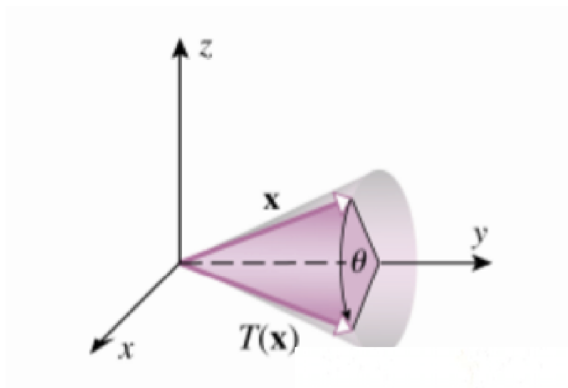
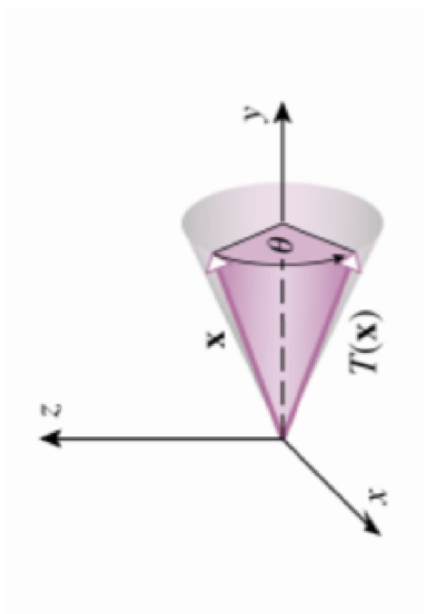
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

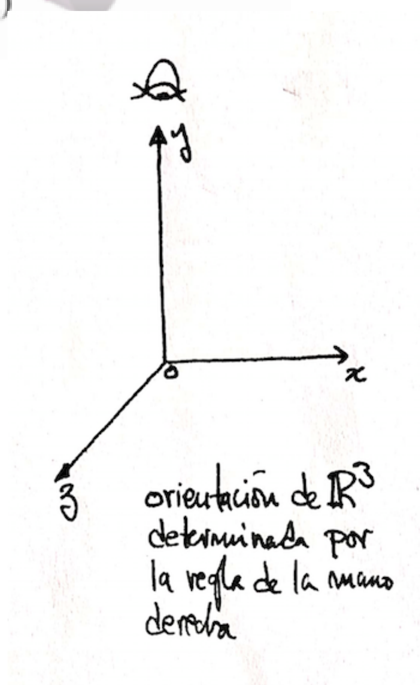
FIGURA 12. Cualquier vector $x \in \mathbb{R}^3$ se puede rotar en sentido contrario a las agujas del reloj en un ángulo θ alrededor de un eje de coordenadas mediante la multiplicación $R_* x$ en la que R_* es la matriz que se describe en la segunda columna de la tabla.

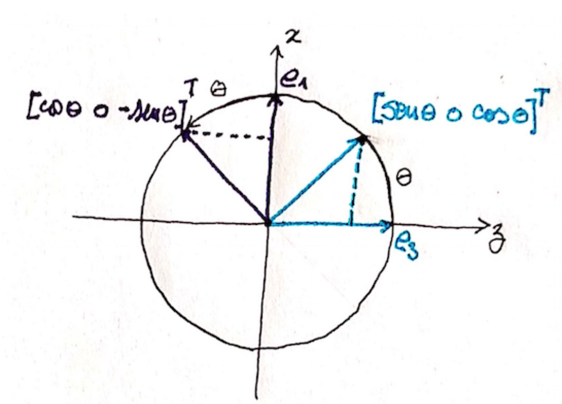
Nota Bene. El signo menos aparece encima de la diagonal en R_x y R_z, pero debajo de la diagonal en R_y. No se trata de un error, se debe a la orientación positiva del eje x con respecto al plano yz.

Veamos las cosas más de cerca:



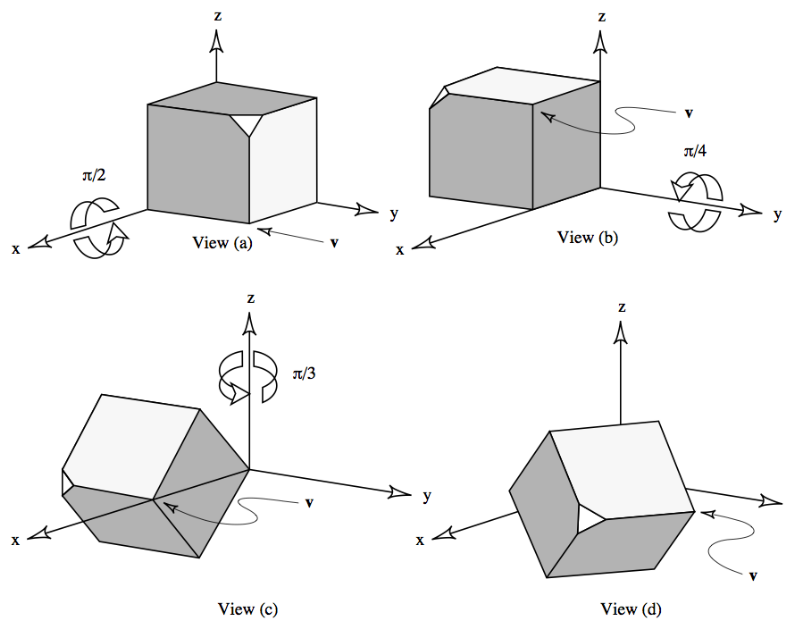






3.3. Ejemplo.

En las siguientes figuras se observa el efecto de realizar tres rotaciones en sentido antihorario en un sólido tridimensional.



Primero, se rota el sólido que aparece en la figura (a) 90° alrededor del eje x para obtener el resultado que se muestra en (b). Después, se gira 45° alrededor del eje y para producir (c) y, finalmente, se gira 60° alrededor del eje z para obtener (d). Los pasos del proceso se pueden seguir observando cómo se mueven la muesca, el vértice v y la cara sombreada más clara.

Pregunta 1. Suponiendo que el vértice v que se muestra en la figura (a) tiene coordenadas $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuáles son las coordenadas de sus imágenes por las sucesivas rotaciones que va experimentando el sólido?

Indicando mediante R_x a la matriz de rotación que transforma los puntos de la figura (a) en los puntos de la figura (b), R_y a que corresponde a la transformación que va de la figura (b) a la figura (c), y si R_z denota la matriz de rotación que transforma los puntos de la figura (c) en los puntos de la figura (d), tenemos que

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; R_y = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \; R_z = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en consecuencia,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xmapsto{R_y} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_z} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

es la secuencia de cambios de posición que va experimentando el vértice v a medida que se va rotando al sólido.

Pregunta 2. ¿Cómo se describe la transformación que convierte a los puntos de la figura (a) en los punto de la figura (d)?

$$\begin{aligned}
R = R_z R_y R_x &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$