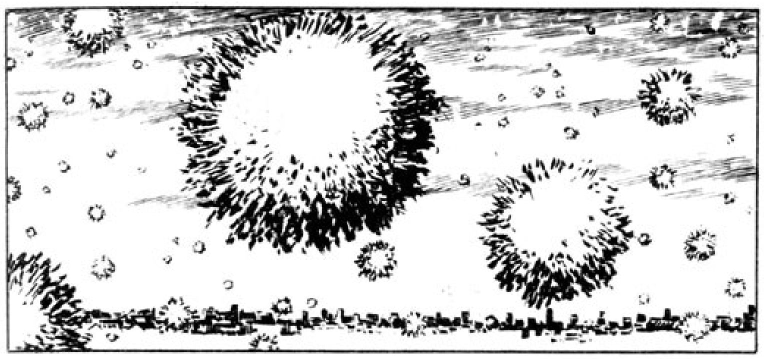
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 11 de octubre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Preliminares 2
1.1. Derivadas, integrales y primitivas 2
1.2. Principio de inducción 2
2. Definiciones y resultados principales 3
2.1. Operadores y ecuaciones diferenciales 3
2.2. Factorización 5
2.3. Análisis de los factores 5
2.4. Composición de los factores 7
2.5. Herramientas para tratar el caso real 9
2.6. Método de los coeficientes indeterminados 10

1. Preliminares

Funciones suaves. El $\mathbb{K}$-espacio vectorial de todas las funciones infinitamente derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$ será designado mediante la notación $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Sus elementos se denominan *funciones suaves*. Cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, en lugar de escribir $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ escribiremos $C^\infty(\mathbb{R})$.

1.1. Derivadas, integrales y primitivas.

En Análisis Matemático I se introduce el operador derivación

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

que a cada función le asigna su función derivada $y \mapsto y'$:

$$D[y] = y'.$$

Propiedades:

1. D es una transformación lineal porque
$$D[ay_1 + y_2] = aD[y_1] + D[y_2]$$
para toda pareja $y_1, y_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ y todo escalar $a \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{Nu}(D) = \mathrm{gen}\,\{\mathbf{1}\}$, donde $\mathbf{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por la asignación $x \mapsto 1$.
3. El teorema fundamental del cálculo integral significa que D es un epimorfismo de $C^\infty(\mathbb{R})$ en sí mismo porque afirma que para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ la función
$$y_p(x) := \int_0^x f(\xi)d\xi$$
es una solución particular de la ecuación
$$D[y] = f.$$
Esto es así, porque $y_p \in C^\infty(\mathbb{R})$ y su función derivada vale $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. La denominada integral indefinida $\int f(x)dx$ de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ describe el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial
$$D[y] = f$$
debido a que
$$\int f(x)dx = \int_0^x f(\xi)d\xi + a\mathbf{1},$$
donde $a \in \mathbb{R}$.

1.2. Principio de inducción.

Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si

(1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y

(H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$,

entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Definiciones y resultados principales

2.1. Operadores y ecuaciones diferenciales.

Operadores diferenciales. Un *operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes* es una transformación lineal $L : C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de la forma

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I, \tag{1}$$

donde $D : C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ es el operador de derivación y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son escalares.

Nota Bene. Nótese que para cada $y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vale que

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Ecuaciones diferenciales. Una *ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes* es una ecuación de la forma

$$L[y] = g \tag{2}$$

donde L es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y g es una función suave.

Polinomio característico y espectro. El *polinomio característico del operador* L es el polinomio $p \in \mathbb{K}_n[x]$ definido por

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

El conjunto de todas las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio característico de L,

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\},$$

se denomina *el espectro* de L.

Nota Bene. Nótese que

$$\begin{aligned} L\left[e^{\lambda x}\right] &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) \\ &= e^{\lambda x}p(\lambda). \end{aligned}$$

Esto explica la importancia del polinomio característico y del espectro de L como herramientas para realizar el análisis del comportamiento de L. Esto es así porque de la igualdad $L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}p(\lambda)$ se deduce que para cada $\lambda \in \sigma(L) \cap \mathbb{K}$ vale que la función $y = e^{\lambda x}$ pertenece al núcleo de L porque $y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ y $L[y] = 0$. De aquí se infiere que

$$\operatorname{gen}\{e^{\lambda x} : \lambda \in \sigma(L) \cap \mathbb{K}\} \subseteq \operatorname{Nu}(L).$$

Ejemplo 2.1. [*ver el* **Ejercicio 1.18**]

1. Si $L = D^2 + 4D - 5I$, entonces
   a) $L[y] = y'' + 4y' - 5y$ para cualquier función suave y;
   b) el polinomio característico de L es $p(x) = x^2 + 4x - 5$, y su espectro es $\sigma(L) = \left\{ \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \right\} = \{1, -5\} \subset \mathbb{R}$.

   De aquí se pueden inferir dos hechos:
   a) el primero es que $p(x) = (x-1)(x+5)$;
   b) el segundo es que $L\left[e^x\right] = L\left[e^{-5x}\right] = 0$.

   Como L es lineal se deduce que
   $$\operatorname{gen}\left\{e^x, e^{-5x}\right\} \subseteq \operatorname{Nu}(L).$$
2. Si $L = D^2 + 4D + 4I$, entonces
   a) $L[y] = y'' + 4y' + 4y$ para cualquier función suave y;
   b) el polinomio característico de L es $p(x) = x^2 + 4x + 4$ y su espectro es $\sigma(L) = \left\{ \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \right\} = \{-2\} \subseteq \mathbb{R}$.

   De aquí se pueden inferir dos hechos:
   a) el primero es que $p(x) = (x+2)^2$;
   b) el segundo es que $L\left[e^{-2x}\right] = 0$.

   Como L es lineal se deduce que
   $$\operatorname{gen}\left\{e^{-2x}\right\} \subseteq \operatorname{Nu}(L).$$
3. Si $L = D^2 + 4I$, entonces
   a) $L[y] = y'' + 4y$ para cualquier función suave y;
   b) el polinomio característico de L es $p(x) = x^2 + 4$ y su espectro es $\sigma(L) = \left\{ \frac{-0 \pm \sqrt{0-16}}{2} \right\} = \{\pm 2i\} = \{2i, -2i\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

   De aquí se pueden inferir dos hechos:
   a) el primero es que $p(x) = (x-2i)(x+2i)$,
   b) el segundo es que $L\left[e^{2ix}\right] = L\left[e^{-2ix}\right] = 0$.

   Pero ahora se presenta un problema cuando pretendemos deducir que
   $$\operatorname{gen}\left\{e^{2ix}, e^{-2ix}\right\} \subseteq \operatorname{Nu}(L).$$

   ¿Por qué pasa esto? Porque el operador L puede actuar sobre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales diferentes.
   a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, L actúa sobre $C^\infty(\mathbb{R})$. En este caso $\operatorname{Nu}(L) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ y las funciones $e^{\pm 2ix} = \cos(2x) \pm i \operatorname{sen}(2x) \notin C^\infty(\mathbb{R})$. Como los escalares son números reales se concluye que
   $$\operatorname{gen}\left\{e^{2ix}, e^{-2ix}\right\} \cap \operatorname{Nu}(L) = \{0\}.$$
   b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, L actúa sobre $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En este caso $\operatorname{Nu}(L) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y no hay obstáculo que nos impida deducir que
   $$\operatorname{gen}\left\{e^{2ix}, e^{-2ix}\right\} \subseteq \operatorname{Nu}(L).$$

Nótese que para el caso en que L actúa sobre $C^\infty(\mathbb{R})$ se puede obtener información no trivial sobre el núcleo de L mediante el siguiente procedimiento. Como $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ se puede considerar que L es un operador lineal sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y en tal caso tenemos que

$$L\left[e^{2ix}\right] = L\left[\cos(2x) + i\,\mathrm{sen}(2x)\right] = L\left[\cos(2x)\right] + iL\left[\mathrm{sen}(2x)\right].$$

En consecuencia,

$$L\left[e^{2ix}\right] = 0 \iff L\left[\cos(2x)\right] = L\left[\mathrm{sen}(2x)\right] = 0$$

lo que nos permite deducir que

$$\mathrm{gen}\left\{\cos(2x), \mathrm{sen}(2x)\right\} \subseteq \mathrm{Nu}(L).$$

2.2. Factorización.

Nota Bene. De acuerdo con el *Teorema fundamental del álgebra*, si p es el polinomio característico de L y el espectro de L es $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r\}$, entonces

$$p(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_i},$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ son tales que $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Lema 2.2 (Factorización). *Sea $L : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y sea p su polinomio característico. Si p se factoriza en la forma*

$$p = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_i},$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ son diferentes dos a dos y $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ son tales que $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, entonces L se factoriza de manera análoga

$$L = \prod_{i=1}^{r}(D-\lambda_i I)^{k_i}. \tag{3}$$

Demostración. La prueba es técnica. Se basa en la identidad $L = p(D)$, y en la propiedad conmutativa de los operadores diferenciales de la forma $D - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, con respecto a la composición. □

2.3. Análisis de los factores.

El siguiente lema constituye la herramienta principal para analizar el comportamiento de los factores de cualquier operador diferencial lineal con coeficientes constantes.

Lema 2.3. *Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que*

$$(D-\lambda I)^k\left[f(x)e^{\lambda x}\right] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x} \tag{4}$$

Demostración. Se basa en el principio de inducción y en las reglas de derivación.

1. $$(D-\lambda I)[f(x)e^{\lambda x}] = D[f(x)e^{\lambda x}] - \lambda f(x)e^{\lambda x} = f'(x)e^{\lambda x}.$$

2. Si (4) es verdadera, entonces

$$\begin{aligned}(D-\lambda I)^{k+1}\left[f(x)e^{\lambda x}\right] &= (D-\lambda I)\left[(D-\lambda I)^{k}\left[f(x)e^{\lambda x}\right]\right]\\ &= (D-\lambda I)\left[f^{(k)}(x)e^{\lambda x}\right] = f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (4) es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Nota Bene. Utilizando (4) se deduce inmediatamente que

$$\left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\right\} \subseteq \operatorname{Nu}\left((D-\lambda I)^{k}\right).$$

En particular, el operador $(D-\lambda I)^{k}$ aniquila a todas las funciones de la forma $x^{j}e^{\lambda x}$, con $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Teorema 2.4 (Comportamiento de los factores)**.** *Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$, el operador diferencial $(D-\lambda I)^{k} : C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ no es un monomorfismo pero si es un epimorfismo.*

1. *No es monomorfismo porque*

$$\operatorname{Nu}\left((D-\lambda I)^{k}\right) = \left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\right\} = \operatorname{gen}\underbrace{\left\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}\right\}}_{\textit{Base del núcleo}}.$$

2. *Es epimorfismo porque para toda $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la ecuación diferencial*

$$(D-\lambda I)^{k}[y] = g,$$

tiene soluciones de la forma

$$y = f(x)e^{\lambda x} + p(x)e^{\lambda x},$$

donde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es una función tal que $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$ y $p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]$.

Demostración. El primer punto se demuestra utilizando el principio de inducción, el segundo utilizando la fórmula (4). Para ello basta observar que $f^{(k)}(x)e^{\lambda x} = g(x)$ si y solamente si $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$. De aquí se deduce que *si f es una función suave tal que $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$, entonces $y_p = f(x)e^{\lambda x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial $(D-\lambda I)^{k}[y] = g$.* $\square$

Nota Bene. Nótese que el teorema anterior proporciona un método para resolver la ecuación diferencial

$$(D-\lambda I)^{k}[y] = g,$$

cualquiera sea $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La metodología de resolución es la siguiente:

> **Paso 1**. Hallar $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$. En este paso se requiere calcular k-primitivas sucesivas y puede resultar tedioso.
> **Paso 2**. Utilizando el resultado del primer paso se obtiene una solución particular de la forma $y_p = f(x)e^{\lambda x}$.
> **Paso 3**. Como $(D-\lambda I)^{k}$ es un operador lineal toda solución de la ecuación $(D-\lambda I)^{k}[y] = g$ es de la forma
>
> $$y = y_p + y_h,$$
>
> donde $y_h \in \operatorname{Nu}\left((D-\lambda I)^{k}\right) = \operatorname{gen}\left\{e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}\right\}$.

Ejemplo 2.5. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = xe^x.$$

Retomamos lo que ya hicimos en el segundo punto del **Ejemplo 2.1**. Allí observamos que el polinomio característico del operador diferencial $L = D^2 + 4D + 4I$ se factoriza como $p = (x+2)^2$ y que el espectro de L es el conjunto $\sigma(L) = \{-2\}$. De acuerdo con **Lema 2.2** sabemos que L se factoriza en la forma $L = (D+2I)^2$ y estamos en condiciones de utilizar la metodología proporcionada por el **Teorema 2.4**. La ejecutamos al pie de la letra, paso por paso.

Paso 1. Hallar una función suave f tal que

$$f''(x) = g(x)e^{2x} = (xe^x)\, e^{2x} = xe^{3x}.$$

Primitivas una vez y obtenemos,

$$f'(x) = \int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ponemos $c = 0$ y volvemos a tomar primitivas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) - \frac{1}{27}e^{3x} + c \\ &= \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ponemos $c = 0$ y obtenemos que

$$f(x) = \frac{1}{9}xe^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} = \frac{1}{27}(3x-2)e^{3x}.$$

Paso 2. Utilizando el resultado del paso anterior se obtiene una solución particular de la forma

$$y_p = f(x)e^{-2x} = \left(\frac{1}{27}(3x-2)e^{3x}\right) e^{-2x} = \frac{1}{27}(3x-2)e^{x}.$$

Paso 3. Como $(D+2I)^2$ es un operador lineal toda solución de la ecuación $(D+2I)^2[y] = xe^x$ es de la forma

$$y = y_p + y_h,$$

donde $y_h \in \mathrm{Nu}\left((D+2I)^2\right) = \mathrm{gen}\left\{e^{-2x},\, xe^{-2x}\right\}$.

En conclusión, todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = xe^x$ son de la forma

$$y = \frac{1}{27}(3x-2)e^x + ae^{-2x} + bxe^{-2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

□

2.4. Composición de los factores.

Lema 2.6. *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, r números complejos distintos dos a dos, y $k_1, k_2, \ldots, k_r$, r números naturales. Entonces, el conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{r}\left\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k_i - 1}e^{\lambda_i x}\right\}$$

es linealmente independiente.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Nota Bene. Nótese que cuando $L = \prod_{i=1}^{r}(D - \lambda_i I)^{k_i}$, el resultado anterior junto con la propiedad conmutativa de los factores de la forma $(D - \lambda_i I)^{k_i}$ permite deducir que

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_i I)^{k_i}\right) \subseteq \mathrm{Nu}(L).$$

En lo que sigue mostraremos la relación entre ambos subespacios es una relación de igualdad.

Lema 2.7 (Miniautura)**.** *Sean λ_1 y λ_2 dos escalares distintos, y sean k_1 y k_2 dos número naturales. Si*

$$L = (D - \lambda_1 I)^{k_1}(D - \lambda_2 I)^{k_2},$$

entonces

$$\mathrm{Nu}\,(L) = \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_1 I)^{k_1}\right) \oplus \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_2}\right). \tag{5}$$

Demostración. Como $\mathrm{Nu}\left((D - \lambda_1 I)^{k_1}\right) \cap \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_2}\right) = 0$. La demostración se reduce a comprobar que para cada $y \in \mathrm{Nu}(L)$ existen $y_1 \in \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_1 I)^{k_1}\right)$ e $y_2 \in \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_1}\right)$ tales que $y = y_1 + y_2$. Para cada $y \in \mathrm{Nu}(L)$ hay dos alternativas:

$$y \in \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_2}\right) \quad \text{ó} \quad y \notin \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_2}\right).$$

En la primera no hay nada que probar porque $y = 0 + y$.

En la segunda, tenemos que $z = (D - \lambda_2 I)^{k_2}[y] \neq 0$ y que $z \in \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_1 I)^{k_1}\right)$ porque $y \in \mathrm{Nu}(L)$. De allí que $z = q_1(x)e^{\lambda_1 x}$ con $q_1 \in \mathbb{C}_{k_1 - 1}[x] \setminus \{0\}$. Pero entonces, y es solución de la ecuación

$$(D - \lambda_2 I)^{k_2}[y] = q_1(x)e^{\lambda_1 x}.$$

En consecuencia,

$$y = f(x)e^{\lambda_2 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x}, \tag{6}$$

donde $p_2 \in \mathbb{C}_{k_2 - 1}[x]$ y f es una función tal que

$$f^{(k_2)}(x) = \left(q_1(x)e^{\lambda_1 x}\right) e^{-\lambda_2 x} = q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, el proceso de integración sucesiva basado en el método de integración por partes tiene como resultado una función de la forma

$$f(x) = p_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}, \tag{7}$$

donde $p_1 \in \mathbb{C}_{k_1 - 1}[x] \setminus \{0\}$. Reemplazando (7) en (6) se obtiene que

$$y = \left(p_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}\right) e^{\lambda_2 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x} = p_1(x)e^{\lambda_1 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x}$$

Esto último significa que

$$y \in \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_1 I)^{k_1}\right) + \mathrm{Nu}\left((D - \lambda_2 I)^{k_2}\right),$$

porque $p_1 \in \mathbb{C}_{k_1 - 1}[x]$ y $p_2 \in \mathbb{C}_{k_2 - 1}[x]$. $\square$

Composición de los factores. Utilizando la factorización (3) se puede comprobar que

1. L no es un monomorfismo porque

$$\mathrm{Nu}\,(L) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Nu}\left((D-\lambda_i I)^{k_i}\right) = \mathrm{gen}\left\{ \underbrace{\bigcup_{i=1}^{r} \left\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_x}, \ldots, x^{k_i-1}e^{\lambda_i x}\right\}}_{\text{Base del núcleo de } L} \right\}.$$

2. L es un epiformismo porque todos sus factores son epimorfismos.

Nota bene. Utilizando el resultado presentado en el segundo punto del **Teorema 2.4** se puede diseñar un algoritmo recursivo para resolver la ecuación diferencial $L[y] = g$, cualquiera sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Algorithm 1 Construcción de una solución particular de $L[y] = g$

Require: L y g.
Ensure: y_p una solución particular de la ecuación $L[y] = g$.

$y_0 \leftarrow g$;
for $i = 1 : r$ **do**
  $y_i \leftarrow$ una solución particular de la ecuación $(D - \lambda_i I)^{k_i}[y] = y_{i-1}$;
end for
$y_p \leftarrow y_r$
return y_p

Nota Bene. La solución particular y_i de la ecuación diferencial $(D - \lambda_i I)^{k_i}[y] = y_{i-1}$ que se menciona en el algoritmo tiene la forma $y_i = f_i(x)e^{-\lambda_i x}$, donde f_i es una función suave tal que $f_i^{(k_i)} = y_{i-1}$.

2.5. Herramientas para tratar el caso real.

Nota Bene. Nótese que cuando $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes, el polinomio característico de L, p, es un polinomio de grado n cuyos coeficientes son reales. Cuando el espectro de L satisface que

$$\sigma(L) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \neq \emptyset,$$

esto es, cuando existe un número complejo $\lambda = a + bi$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $p(\lambda) = 0$, también ocurre que $p\left(\bar{\lambda}\right) = 0$, donde $\bar{\lambda} = a - bi$. En este caso el polinomio característico de L admite una factorización de la forma

$$p = (x-\lambda)^k (x-\bar{\lambda})^k q = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k q,$$

donde $2 \leq 2k \leq n$ y $q \in \mathbb{R}_{n-2k}[x]$ es un polinomio tal que $q(\lambda) \neq 0$. Como las funciones $e^{(a\pm bi)x} = e^{ax}\cos(bx) \pm ie^{ax}\,\mathrm{sen}(bx) \notin \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, no podemos afirmar que

$$\mathrm{gen}\left\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}\right\} \oplus \mathrm{gen}\left\{e^{\bar{\lambda} x}, xe^{\bar{\lambda} x}, \ldots, x^{k-1}e^{\bar{\lambda} x}\right\} \subseteq \mathrm{Nu}(L)$$

porque es un contrasentido. Este problema se repara utilizando que para cada $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, los conjuntos

$$\left\{x^j e^{(a+bi)x},\, x^j e^{(a-bi)x}\right\},\ \left\{x^j e^{ax}\cos(bx),\, x^j e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right\}$$

generan el mismo $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Así que, reagrupando términos por parejas conjugadas, este procedimiento permite afirmar que

$$\mathrm{Nu}\left(\left(D^2 - 2aD + (a^2+b^2)I\right)^k\right) = \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathrm{gen}\left\{x^j e^{ax}\cos(bx),\, x^j e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right\}$$

como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. La base del núcleo de L se repara reemplazando el conjunto de parejas de funciones complejas conjugadas

$$\left\{e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda}x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}, x^{k-1}e^{\bar{\lambda}x}\right\}$$

por el conjunto de parejas de funciones reales constituidas sus partes reales e imaginarias

$$\left\{e^{ax}\cos(bx),\, e^{ax}\operatorname{sen}(bx),\, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos(bx),\, x^{k-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\right\}.$$

Ejemplo 2.8. [*ver el* **Ejercicio 1.18**] Consideramos el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por $L = (D^2 - 6D + 13I)^2$. En este caso el polinomio característico de L es $p(x) = (x^2 - 6x + 13)^2$ y su espectro es

$$\sigma(L) = \left\{\frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2}\right\} = \{3 \pm 2i\} = \{3+2i, 3-2i\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

En este caso podemos afirmar que

$$\mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\left\{e^{3x}\cos(2x), e^{3x}\operatorname{sen}(2x), xe^{3x}\cos(2x), xe^{3x}\operatorname{sen}(2x)\right\}.$$

$\square$

2.6. Método de los coeficientes indeterminados.

Aniquiladores. Sea $g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Un aniquilador de g es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, A, tal que $g \in \mathrm{Nu}(A)$. En otras palabras, A es un aniquilador de g, siempre y cuando $A[g] = 0$.

Teorema 2.9. *Sean L y A dos operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes. Si g es una función suave aniquilada por A, entonces*

(a) *Toda solución de la ecuación*

$$L[y] = g \tag{8}$$

pertenece a $\mathrm{Nu}(A \circ L)$*;*

(b) *En todo subespacio $\mathbb{S} \subset \mathrm{Nu}(A \circ L)$ tal que $\mathrm{Nu}(L) \oplus \mathbb{S} = \mathrm{Nu}(A \circ L)$ existe una única solución de la ecuación $L[y] = g$.*

Demostración. Para fijar ideas suponemos que L es de orden n y que A es de orden m. Entonces, $A \circ L$ es de orden $n + m$.

(a) Aplicamos A en ambos lados de la ecuación $L[y] = g$ y obtenemos

$$(A \circ L)[y] = A[g] = 0.$$

(b) Sea $\mathcal{B}_L = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ una base de $\mathrm{Nu}(L)$. Como $A \circ L$ es de orden $n+m$ la extendemos a una base $\mathcal{B}_{AL} = \{y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\}$ de $\mathrm{Nu}(A \circ L)$ de manera tal que $\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L = \{z_1, \dots, z_m\}$ sea una base del subespacio $\mathbb{S}$. Entonces $L[z_1], \dots, L[z_m]$ pertenecen al $\mathrm{Nu}(A)$ y son linealmente independientes. En efecto, si

$$\sum_{j=1}^{m} c_j L[z_j] = 0,$$

entonces

$$L\left[\sum_{j=1}^{m} c_j z_j\right] = 0.$$

Lo que implica que $\sum_{j=1}^{m} c_j z_j \in \mathrm{Nu}(L) \cap \mathbb{S} = \{0\}$. Pero como $z_1, \dots, z_m$ son linealmente independientes, resulta que $c_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Como la dimensión de $\mathrm{Nu}(A) = m$, el conjunto

$$\{L[z_1], \dots, L[z_m]\}$$

es una base de $\mathrm{Nu}(A)$. En consecuencia, si $g \in \mathrm{Nu}(A)$, g admite una única representación de la forma

$$g = \sum_{j=1}^{m} c_j L[z_j].$$

Por lo tanto,

$$y_p = \sum_{j=1}^{m} c_j z_j \in \mathbb{S}$$

es una solución particular de la ecuación $L[y] = g$. Como los coeficientes $c_1, \dots, c_m$ son únicos, no hay otra solución de $L[y] = g$ en $\mathbb{S}$.

□

Nota Bene. Nótese que la demostración del **Teorema 2.9** es constructiva y proporciona un método para construir una solución particular y_p de la ecuación (8) siempre y cuando se disponga de un aniquilador de la función g. A saber:

1. Fijar un aniquilador A de la función g.
2. Hallar una base $\mathcal{B}_L = \{y_1, \dots, y_n\}$ de $\mathrm{Nu}(L)$.
3. Hallar una base $\mathcal{B}_{AL} = \{y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\}$ de $\mathrm{Nu}(A \circ L)$.
4. Considerar el subespacio

$$\mathbb{S} = \mathrm{gen}(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L) = \mathrm{gen}\{z_1, \dots, z_m\}.$$

Como $\{L[z_1], \dots, L[z_m]\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(A)$ y $A[g] = 0$, existen únicos escalares $c_1, \dots, c_m$ tales que $g = \sum_{j=1}^{m} c_j L[z_j]$, y de allí se deduce que $y_p = \sum_{j=1}^{m} c_j z_j$ es la única solución particular de la ecuación (8) perteneciente al subespacio $\mathbb{S}$.

Ejemplo 2.10. Consideramos la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}. \tag{9}$$

Tiene la forma $L[y] = g$, donde $L = D^2 - 5D + 6I$ y $g = xe^{3x}$. Para resolver la ecuación factorizamos a L y aniquilamos a g. Como el polinomio característico de

L es $p(x) = x^2 - 5x + 6$ y $p(x) = (x-2)(x-3)$, tenemos que $L = (D-2I)(D-3I)$. Usando el resultado del **Lema 2.3** se puede ver que $A = (D-3I)^2$ es el aniquilador de $g = xe^{3x}$ de menor orden posible. Como $A \circ L = (D-2I)(D-3I)^3$ tenemos que

1. $\mathcal{B}_L = \{e^{2x}, e^{3x}\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(L)$
2. $\mathcal{B}_{AL} = \{e^{2x}, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(A \circ L)$
3. $\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L = \{xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$

Como sabemos que existe una única solución particular de la forma

$$y_p = c_1xe^{3x} + c_2x^2e^{3x} = (c_1x + c_2x^2)e^{3x}, \tag{10}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, escribimos la ecuación

$$L\left[(c_1x + c_2x^2)e^{3x}\right] = xe^{3x}$$

y despejamos c_1 y c_2. El lado izquierdo de la ecuación se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
L\left[(c_1x + c_2x^2)e^{3x}\right] &= (D-2I)(D-3I)\left[(c_1x + c_2x^2)e^{3x}\right] \\
&= (D-2I)\left[(c_1 + 2c_2x)e^{3x}\right] \\
&= D\left[(c_1 + 2c_2x)e^{3x}\right] - 2(c_1 + 2c_2x)e^{3x} \\
&= 2c_2e^{3x} + 3(c_1 + 2c_2x)e^{3x} - 2(c_1 + 2c_2x)e^{3x} \\
&= 2c_2e^{3x} + (c_1 + 2c_2x)e^{3x} \\
&= (2c_2 + c_1)e^{3x} + 2c_2xe^{3x}
\end{aligned}$$

Como $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ es linealmente independiente, la identidad

$$(2c_2 + c_1)e^{3x} + 2c_2xe^{3x} = xe^{3x}$$

solo es posible para $2c_2 + c_1 = 0$ y $2c_2 = 1$. En consecuencia, $c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_1 = -1$; reemplazamos estos valores en (10) y obtenemos la solución particular que estábamos buscando:

$$y_p = \left(-x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}.$$

Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación diferencial (9) son de la forma

$$y = \left(-x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x} + ae^{2x} + be^{3x},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$