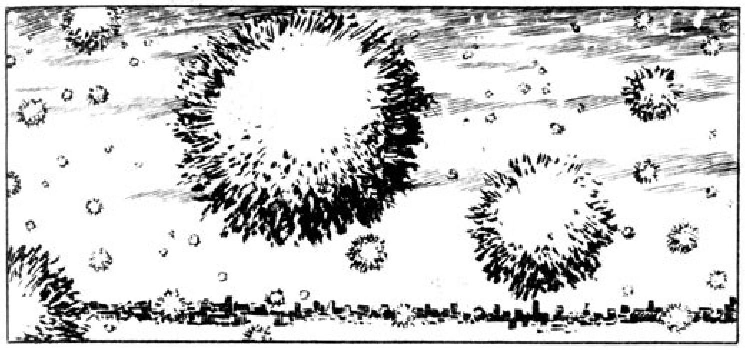
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
Notas en la emergencia sanitaria:
borradores para la clase del 13 de octubre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Herramientas y técnicas de cáculo

1.1. El binomio de Newton y el triángulo de Pascal.

En Análisis Matemático I se enseña que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

cualesquiera sean $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Observando que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

y que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$ vale que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

se comprueba que los coeficientes binomiales pueden organizarse en el llamado *triángulo de Pascal*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

1.2. Derivadas del producto y derivadas sucesivas.

Si f y g son funciones suaves, se puede comprobar que

$$D^n[fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}[f] D^k[g]. \tag{1}$$

También se puede comprobar que

$$(D - \lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} (-\lambda)^k. \tag{2}$$

Ejemplo 1.1. Para fijar ideas ilustramos el caso $n = 3$. La expresión (1) adopta la forma

$$D^3[fg] = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',$$

y la expresión (2) adopta la forma

$$(D - \lambda I)^3 = D^3 - 3\lambda D^2 + 3\lambda^2 D - \lambda^3 I.$$

En consecuencia,

$$(D - \lambda I)^3[y] = y''' - 3\lambda y'' + 3\lambda^2 y' - \lambda^3 y.$$

1.3. El wronskiano y su derivada.

Recordemos que el wronskiano de un conjunto de funciones suaves $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $W : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, definido por

$$W(x) := \det \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz wronskiana de } \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}}, \tag{3}$$

se introdujo para estudiar la independencia lineal del conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. En aquel momento demostramos que *si existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $W(x_0) \neq 0$*, entonces el conjunto* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *es linealmente independiente*. La prueba se basaba en observar que de la relación

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0,$$

se deduce que los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ satisfacen el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Como $W(x_0)$ es el determinante de la matriz de dicho sistema. Decir que $W(x_0) \neq 0$ equivale a decir que el sistema es compatible determinado y por lo tanto, su única solución es la solución trivial.

Nota Bene. Nótese que el wronskiano de un conjunto de funciones suaves también es una suave. Se puede comprobar que *la derivada del wronskiano es el determinante de la matriz que resulta de derivar las componentes de la* n*-ésima fila de la matriz wronskiana de* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. La prueba se basa en la regla para derivar determinantes.

Lema 1.2 (Regla de derivación)**.** *Sea* $A \in (C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))^{n \times n}$ *una matriz de* $n \times n$ *cuyos coeficientes* a_{ij} *son funciones suaves. Entonces,* $\det(A) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ *y su derivada se calcula mediante la siguiente regla*

$$D\left[\det(A)\right] = \sum_{i=1}^{n} \det(A_i'),$$

donde, para cada $i \in \mathbb{I}_n$*,*

$$A_i' = A + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}' - a_{ij}) E_{ij} \tag{5}$$

es la matriz que resulta de derivar las componentes de la i*-ésima fila de* A*.*

Demostración. Ejercicio. □

1.4. Unicidad del operador normalizado.

Advertencia. En todo lo que sigue, salvo que se indique lo contrario, n será un número natural y $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}))$ será un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I, \tag{6}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Comentario. En esas condiciones se sabe que $\dim(\mathrm{Nu}(L)) = n$. Esto significa que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7}$$

se puede describir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\{y \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) : L[y] = 0\} &= \mathrm{gen}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \\ &= \left\{ y \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) : y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j,\ c_j \in \mathbb{K}, j \in \mathbb{I}_n \right\},\end{aligned}$$

donde $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(L)$.

Definición 1.3. A un conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de soluciones de (7) linealmente independiente se lo denomina un *conjunto fundamental de soluciones* de la ecuación homogénea $L[y] = 0$.

Lema 1.4. *Sea $\{y_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$, y sea $\tilde{L}$ un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes de la forma*

$$\tilde{L} = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \cdots + b_1 D + b_0 I, \tag{8}$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{K}$. Si $\tilde{L}[y_j] = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$, entonces $\tilde{L} = L$.

Demostración. Por un lado

$$\Delta = \tilde{L} - L = \sum_{k=1}^{n} (b_{n-k} - a_{n-k})\, D^{n-k}$$

es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de orden menor que n. Por otro lado, $\{y_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathrm{Nu}(\Delta)$. Si $\Delta \neq 0$, la dimensión del núcleo de Δ debe ser menor que n. Como $\{y_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente esa posibilidad queda descartada. En consecuencia, $\Delta = 0$ y por lo tanto $\tilde{L} = L$. $\square$

1.5. Aniquiladores.

Lema 1.5 (Aniquiladores)**.** *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $p \in \mathbb{R}[x]$. Si $A \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de orden positivo, entonces*

$$\begin{aligned} A\left[p(x)e^{ax}\right] = 0 &\iff A = (D - aI)^{\deg(p)+1} q(D), \\ A\left[p(x)e^{ax}\cos(bx)\right] = 0 &\iff A = (D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)^{\deg(p)+1} q(D), \\ A\left[p(x)e^{ax}\sin(bx)\right] = 0 &\iff A = (D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)^{\deg(p)+1} q(D), \end{aligned}$$

donde $\deg(p)$ es el grado del polinomio p, y $q \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$.

Demostración. Se deduce de la relación

$$(D-\lambda I)^k[f(x)e^{e^{\lambda x}}] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

y del **Lema 1.4**. $\square$

2. Problema de valores iniciales

El siguiente resultado es la herramienta principal para tratar este problema

Teorema 2.1 (Unicidad)**.** *Sea $y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ una solución de la ecuación $L[y] = 0$. Si $y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$, entonces $y \equiv 0$.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Nota Bene. Nótese que el resultado anterior tiene la siguiente consecuencia: *si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $L[y] = 0$, entonces el wronskiano de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ verifica que $W(0) \neq 0$.* Esto es así, porque toda solución de la ecuación homogénea $L[y] = 0$ se representa de manera única como una combinación lineal de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n. \tag{9}$$

Cuando se reemplazan las *condiciones iniciales*

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

en la representación (9) se obtiene un sistema lineal homogéneo en las indeterminadas $c_1, c_2, \ldots, c_n$, cuya matriz es la matriz wronskiana de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ evaluada en $x = 0$. Como esas condiciones implican que $y \equiv 0$, la independencia lineal del sistema fundamental $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$. Como se trata de un sistema compatible determinando el determinante de su matriz debe ser no nulo. Por lo tanto, $W(0) \neq 0$. $\square$

2.1. Comportamiento del Wronskiano.

Lema 2.2. *Sea L el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes definido en* (6) *y sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un conjunto de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Si $W : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ es el wronskiano de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, entonces*

$$W' = -a_{n-1}W. \tag{10}$$

En consecuencia,

$$W(x) = W(0)e^{-a_{n-1}x}. \tag{11}$$

Demostración. Se deduce de la fórmula general de la derivada del wronskiano y del hecho de que toda solución de la ecuación homogénea $L[y] = 0$ verifica que

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y. \tag{12}$$

Reemplazando está expresión en las componentes de la última fila de la matriz que describe la derivada del wronskiano y usando las propiedades del determinante, se deduce la veracidad de (10). $\square$

Nota Bene. Nótese que cuando $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un conjunto de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$, hay dos alternativas:

1. $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $W \equiv 0$.

La primera alternativa es equivalente a que $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sea un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. La segunda es equivalente a que el conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sea linealmente dependiente.

Los argumentos y resultados precedentes se resumen en el siguiente teorema

Teorema 2.3 (Bôcher, 1900)**.** *Sea L un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_0) = 0$, entonces $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es linealmente dependiente.*

2.2. Problema de valores iniciales.

Sea L el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes definido en (6). Si g es una función suave e $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ es una colección de escalares cualesquiera pero fija. Resolver *el problema de valores iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L[y] & = & g \\ y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & y_0' \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(0) & = & y_0^{(n-1)} \end{array} \right. \tag{13}$$

significa determinar el conjunto de todas las funciones suaves y que satisfacen la ecuación $L[y] = g$ y cuyas derivadas sucesivas en el 0 verifican que $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

El siguiente resultado proporciona la herramienta principal para tratar este problema. Su demostración es constructiva y ofrece un método para resolverlo.

Teorema 2.4 (Existencia y unicidad)**.** *Sea L el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes definido en* (6)*. Dados $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{K}$ y $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ existe una única solución de la ecuación $L[y] = g$ que satisface las condiciones iniciales $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.*

Demostración. Dado un sistema fundamental de soluciones de $L[y] = 0$,

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\},$$

sabemos que la ecuación

$$L[y] = g \tag{14}$$

tiene solución y que todas sus soluciones tienen la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p \tag{15}$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación (14) y $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Resolver el problema de valores iniciales (13) equivale resolver el siguientes sistema lineal de $n \times n$, en las incógnitas $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$c_1 y_1^{(k)}(0) + c_2 y_2^{(k)}(0) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(0) + y_p^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$$

para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Esto es, se trata de resolver sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \cdots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \cdots & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - y_p(0) \\ y_0' - y_p'(0) \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} - y_p^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Matriz wronskiana de $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ en $x = 0$.

Este sistema tiene solución única porque $W(0) \neq 0$. Despejados los $c_1, c_2, \dots, c_n$ se reemplazan en (15) y San se acabó el problema: la solución existe y es única. $\square$

Comportamiento asintótico. Dados L el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes definido en (6) y g una función suave se trata de analizar el comportamiento para $x \to +\infty$ de las soluciones de la ecuación $L[y] = 0$ para los distintos juegos de condiciones iniciales $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

3. Ecuaciones de segundo orden

3.1. Análisis.

Consideramos la ecuación diferencial general

$$y'' + by' + cy = 0, \tag{16}$$

donde $b, c \in \mathbb{R}$. Se trata de analizar el comportamiento de sus soluciones para las distintas elecciones de la pareja de coeficientes b, c.

Nota Bene. La ecuación (16) tiene la forma $L[y] = 0$, donde $L = D^2 + bD + cI$. En principio, el comportamiento de sus soluciones depende del espectro de L

$$\sigma(L) = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right\} = \left\{ -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \right\}.$$

Hay tres casos posibles que dependen de las relaciones entre b y c:

$$\frac{b^2}{4} > c, \quad \frac{b^2}{4} = c, \quad \frac{b^2}{4} < c.$$

Caso 1. $\frac{b^2}{4} > c$. En este caso el espectro de L es de la forma

$$\sigma(L) = \left\{ -\frac{b}{2} \pm \Omega \right\},$$

donde $\Omega = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, y las soluciones de la ecuación homogénea (16) son de la forma

$$y = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2} + \Omega\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2} - \Omega\right)x} = e^{\left(-\frac{b}{2} + \Omega\right)x} \left(c_1 + c_2 e^{-2\Omega x}\right) \asymp c_1 e^{\left(-\frac{b}{2} + \Omega\right)x}, \tag{17}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Para analizar el comportamiento del

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)$$

necesitamos distinguir tres casos:

1. Caso $-\frac{b}{2}+\Omega<0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b>0,\, 0<c<\frac{b^2}{4}\right\}.$$
En este caso,
$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$
para cualquier pareja $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
2. Caso $-\frac{b}{2}+\Omega=0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b>0,\, c=0\right\}$$
En este caso,
$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=c_1$$
para cualquier pareja $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
3. Caso $-\frac{b}{2}+\Omega>0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b>0,\, c<0 \,\vee\, b\le 0,\, c<\frac{b^2}{4}\right\}$$
En este caso,
$$\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_1\neq 0\\ 0 & \text{si } c_1=0\end{cases}$$
para cualquier $c_2\in\mathbb{R}$.

¿Cómo dependen c_1 y c_2 de las condiciones iniciales $y(0), y'(0)$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -\frac{b}{2}+\Omega & -\frac{b}{2}-\Omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(0)\\ y'(0)\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\Omega}\begin{bmatrix} -\frac{b}{2}-\Omega & -1\\ \frac{b}{2}-\Omega & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0)\\ y'(0)\end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\Omega}\begin{bmatrix} \left(-\frac{b}{2}-\Omega\right)y(0)-y'(0)\\ \left(\frac{b}{2}-\Omega\right)y(0)+y'(0)\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $c_1=0$ si y solamente si

$$\begin{bmatrix} y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{2}-\Omega\end{bmatrix}^T\right\}$$

Caso 2. $\frac{b^2}{4}=c$. En este caso el espectro de L es de la forma

$$\sigma(L)=\left\{-\frac{b}{2}\right\},$$

y las soluciones de la ecuación homogénea (16) son de la forma

$$y=c_1e^{-\frac{b}{2}x}+c_2xe^{-\frac{b}{2}x}=xe^{-\frac{b}{2}x}\left(\frac{c_1}{x}+c_2\right)\asymp c_2xe^{-\frac{b}{2}x}, \tag{18}$$

con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Para analizar el comportamiento del

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)$$

necesitamos distinguir dos casos:

1. Caso $b > 0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{ \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b > 0,\, c = \frac{b^2}{4} \right\}.$$
En este caso,
$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$
para cualquier pareja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. Caso $b \leq 0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{ \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b \leq 0,\, c = \frac{b^2}{4} \right\}$$
En este caso,
$$\lim_{x \to +\infty} |y(x)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } c_2 = 0 \end{cases}$$
para cualquier $c_1 \in \mathbb{R}$.

¿Cómo dependen c_1 y c_2 de las condiciones iniciales $y(0), y'(0)$?
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \frac{b}{2} y(0) + y'(0) \end{bmatrix}.$$
Por lo tanto, $c_2 = 0$ si y solamente si
$$\begin{bmatrix} y(0) & y'(0) \end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix}^T \right\}$$

Caso 3. $\frac{b^2}{4} < c$. En este caso el espectro de L es de la forma
$$\sigma(L) = \left\{ -\frac{b}{2} \pm \Omega i \right\},$$
donde $\Omega = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$, y las soluciones de la ecuación homogénea (16) son de la forma
$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos(\Omega x) + c_2 e^{-\frac{b}{2}x} \operatorname{sen}(\Omega x) = e^{-\frac{b}{2}x} \left(c_1 \cos(\Omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\Omega x) \right), \tag{19}$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Para analizar el comportamiento del
$$\lim_{x \to +\infty} y(x)$$
necesitamos distinguir tres casos:

1. Caso $b > 0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{ \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b > 0,\, c > \frac{b^2}{4} \right\}.$$
En este caso,
$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$
para cualquier pareja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Caso $b=0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b=0,\, c>0\right\}$$
Salvo el caso trivial $c_1=c_2=0$, en este caso no existe el
$$\lim_{x\to+\infty} y(x),$$
la función es oscilante y se mantiene acotada satisfaciendo que
$$|y(x)| \leq |c_1+|c_2|$$
para todo $x\in\mathbb{R}$, cualquiera sea la pareja $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.
3. Caso $b<0$. Esto ocurre cuando
$$\left\{\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : b<0,\, c>\frac{b^2}{4}\right\}$$
En este caso, salvo por el caso trivial $c_1=c_2=0$, no existe el
$$\lim_{x\to+\infty} y(x),$$
porque la función es oscilante, pero a diferencia del caso anterior esta vez la función no es acotada.

¿Cómo dependen c_1 y c_2 de las condiciones iniciales $y(0), y'(0)$?
$$\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -\frac{b}{2} & \Omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0)\\ y'(0)\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\Omega}\begin{bmatrix} \Omega & 0\\ \frac{b}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0)\\ y'(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0)\\ \frac{b}{2\Omega}y(0)+\frac{1}{\Omega}y'(0)\end{bmatrix}.$$

3.2. Corolarios. Del análisis anterior se desprende la validez del siguiente resultado

Corolario 3.1 (Comportamiento asintótico)**.** *Sean $b, c\in\mathbb{R}^+_*$ Todas las soluciones de la ecuación*

$$y''+by'+cy=0, \tag{20}$$

tienden a 0 *cuando* $x\to+\infty$.

Nota Bene. Nótese que dados $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ tales que $c_1^2+c_2^2>0$, vale que
$$c_1\cos(\Omega x)+c_2\operatorname{sen}(\Omega x) = \sqrt{c_1^2+c^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos(\Omega x)+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\operatorname{sen}(\Omega x)\right),$$
Como
$$\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2=1,$$
existe un único $\Phi\in[0,2\pi)$ tal que
$$\cos(\Phi)=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \operatorname{sen}(\Phi)=-\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}.$$
Poniendo $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ y usando ese valor de Φ tenemos que
$$c_1\cos(\Omega x)+c_2\operatorname{sen}(\Omega x) = A\cos(\Omega x+\Phi)$$
Hemos demostrado el siguiente resultado:

Corolario 3.2 (Oscilador)**.** *Sean $b, c \in \mathbb{R}$ tales que $b^2 < 4c$. Todas las soluciones de la ecuación*

$$y'' + by' + cy = 0, \tag{21}$$

son de la forma

$$y = Ae^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\Omega x + \Phi\right), \tag{22}$$

donde $\Omega = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$ y $A \geq 0$, $\Phi \in [0, 2\pi)$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Nota Bene. Nótese que la expresión para las soluciones de la ecuación (21) dada en (22) permite interpretar de un golpe de vista el comportamiento de las mismas.