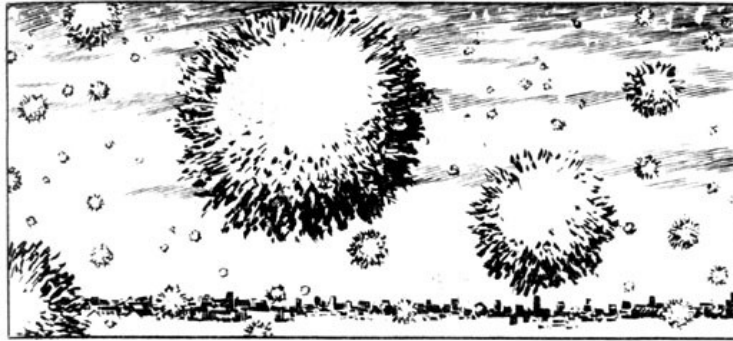


---

Álgebra II (Curso 23)  
Segundo cuatrimestre, 2021  
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:  
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 18 DE OCTUBRE  
Sebastian GRYNBERG

---



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,  
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Espacios euclídeos	2
1.1. Definiciones y propiedades elementales	2
2. Geometría en espacios euclídeos reales	7
2.1. Longitudes y ángulos	7
2.2. Contenido geométrico de la tabla de multiplicar	10
2.3. Primera descomposición ortogonal	11
2.4. Validez del quinto postulado	12

## 1. ESPACIOS EUCLÍDEOS

En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario,  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

## 1.1. Definiciones y propiedades elementales.

**Definición 1.1** (Producto interno). *Un producto interno en un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathbb{V}$  es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$  que posee las siguientes propiedades:*

- (i) Para cada  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $x, y, z \in \mathbb{V}$ 
  - a)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
  - b)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .
- (ii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in \mathbb{V}$ .
- (iii)  $\langle x, x \rangle > 0$  si  $x \neq 0$ .

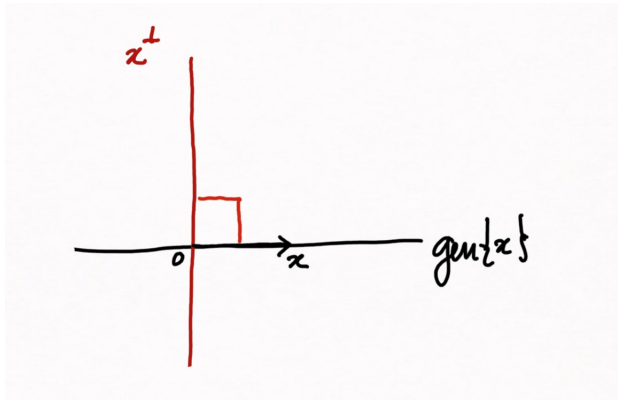
**Definición 1.2** (Espacio euclídeo). *Un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathbb{V}$  munido de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se llama espacio euclídeo y se denota por  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  se dice que  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio euclídeo real y cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se dice que  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio euclídeo complejo*

**Nota Bene.** Nótese que

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

**Definición 1.3.** *Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio euclídeo. Decimos que los vectores  $x$  e  $y$  son ortogonales entre sí, y escribimos  $x \perp y$ , si, y sólo si,  $\langle x, y \rangle = 0$ . El conjunto de todos los vectores ortogonales a  $x$  se denota por  $x^\perp$ , y se llama el subespacio ortogonal a  $x$*

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x \rangle = 0\}.$$



**Nota Bene.** Nótese que

$$x^\perp \cap \text{gen}\{x\} = \{0\}.$$

En efecto, si  $y \in x^\perp \cap \text{gen}\{x\}$  tenemos que  $0 = \langle y, x \rangle$  y también que existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $y = \lambda x$ . De aquí que  $0 = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$ . Por lo tanto,  $\lambda = 0$  ó  $\langle x, x \rangle = 0$ . En el primer caso  $y = 0x = 0$ ; en el segundo  $x = 0$  y entonces  $y = 0$ .

**Definición 1.4.** Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio euclídeo, la función  $\| \cdot \| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

se denomina la norma inducida por el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Al número no negativo  $\|x\|$  se lo denomina la norma de  $x$ .

**Nota Bene.** Nótese que las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de las propiedades elementales del producto interno.

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x \in \mathbb{V}$ .

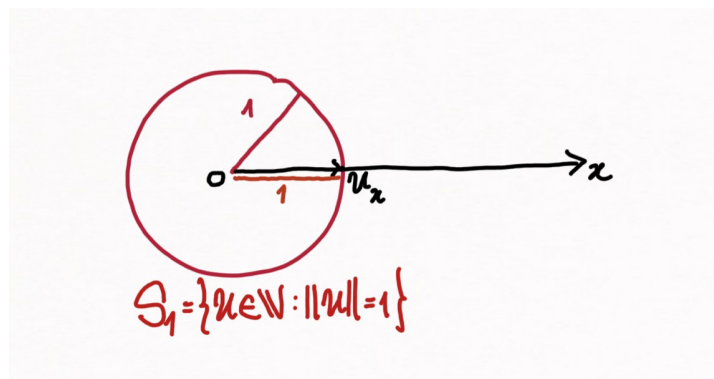
**Interpretación geométrica.** La norma de  $x$  representa la longitud del segmento de recta  $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$  que une a los puntos 0 y  $x$ .



**Esfera unitaria.** El conjunto de todos los vectores de norma unitaria,

$$S_1 = \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\},$$

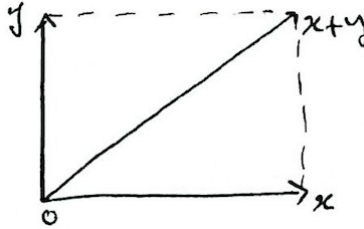
se denomina la esfera unitaria. Cuando  $\dim(\mathbb{V}) = 2$  se denominará la circunferencia unitaria.



**Nota Bene.** Nótese que si  $x \neq 0$ , entonces  $u_x := \|x\|^{-1}x$  pertenece al subespacio generado por  $x$  y  $\|u_x\| = 1$ . En otras palabras, para cada  $x \neq 0$ , existe un único elemento  $u_x \in S_1$ , tal que  $x = \|x\|u_x$ .

**Teorema 1.5** (Pitágoras). *Afirma que si  $x \perp y$ , entonces*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



*Demostración.* Desarrollando el cuadrado del binomio se obtiene

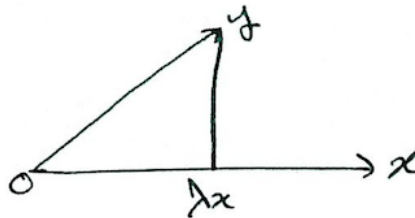
$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

□

**Nota Bene.** Nótese que para pasar de la tercera a la cuarta igualdad usamos que

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

**Problema.** Dados  $x, y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ , hallar  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $y - \lambda x \perp x$

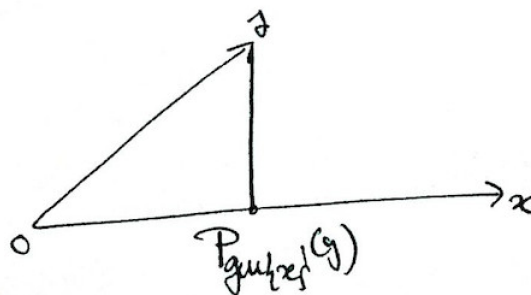


Traducimos y seguimos la huella

$$\begin{aligned} y - \lambda x \perp x &\iff \langle y - \lambda x, x \rangle = 0 \\ &\iff \langle y, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

**Nomenclatura.** El vector  $\frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x$  se llama proyección ortogonal de  $y$  sobre el subespacio generado por  $x$  y se lo designa mediante

$$P_{\text{gen}\{x\}}(y) := \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x.$$



**Nota Bene.** Nótese que para  $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}$  la desigualdad  $\|y - \lambda x\|^2 \geq 0$  implica que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|y - \lambda x\|^2 &= \langle y - \lambda x, y - \lambda x \rangle \\ &= \langle y, y - \lambda x \rangle - \lambda \underbrace{\langle x, y - \lambda x \rangle}_{=0} \quad \text{porque } y - \lambda x \perp x \\ &= \langle y, y \rangle - \bar{\lambda} \langle y, x \rangle \\ &= \|y\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \langle y, x \rangle \quad \text{porque } \overline{\langle y, x \rangle} = \langle x, y \rangle \\ &= \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2} \quad \text{porque } \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|^2 \end{aligned}$$

Como  $\|y - \lambda x\|^2 \geq 0$  y  $\|x\|^2 > 0$ , resulta que

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0$$

y de allí se deduce que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

□

**Nota Bene.** Nótese que  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff y = \lambda x$  con  $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}$ .

Hemos demostrado el siguiente Teorema

**Teorema 1.6** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio euclídeo. Para todo  $x, y \in \mathbb{V}$  vale que*

$$(1) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Además, si  $x \neq 0$ , la igualdad en (1) se cumple si y solo si  $y = \lambda x$  con  $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}$ .

**Desigualdad triangular.** La *desigualdad triangular*

$$(2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En efecto, basta observar que  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \iff \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq \|x\|\|y\|$  y utilizar a desigualdad de Cauchy-Schwarz para comprobar que  $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq \|x\|\|y\|$ .  $\square$

**Corolario 1.7.** Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio euclídeo y sea  $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  su norma inducida,

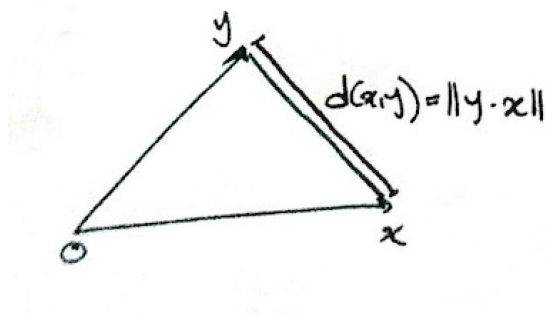
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Vale que:

1.  $\|x\| = 0$  si, y sólo si,  $x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x \in \mathbb{V}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}$ .

**Métrica.** Todo espacio euclídeo  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se convierte en un *espacio métrico* definiendo la distancia entre sus puntos,  $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , mediante la fórmula

$$(3) \quad d(x, y) := \|y - x\|.$$



Esta función es una distancia porque satisface las siguientes propiedades

1. Para  $x, y \in \mathbb{V}$ :  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}$  (*simetría*).
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in \mathbb{V}$  (*desigualdad triangular*).

**Nota Bene.** Nótese que la distancia definida en (3) posee las siguientes propiedades adicionales:

(a) *Invarianza por traslaciones:*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z).$$

En palabras, la distancia entre  $x$  e  $y$  no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación. En particular,  $d(x, y) = d(x - y, 0)$ , de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

(b) *Cambio de escala por dilataciones:*

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y).$$

En palabras, al dilatar ambos puntos por un mismo factor  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la distancia queda multiplicada por  $|\lambda|$ .

## 2. GEOMETRÍA EN ESPACIOS EUCLÍDEOS REALES

En todo lo que sigue  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  representará un espacio euclídeo real. Esto significa que  $\mathbb{V}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface que:

- 1) Para cada  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $x, y, z \in \mathbb{V}$ 
  - a)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
  - b)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .
- 2)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}$ .
- 3)  $\langle x, x \rangle > 0$  si  $x \neq 0$ .

### 2.1. Longitudes y ángulos.

En este contexto, el cuadrado del binomio adopta la forma

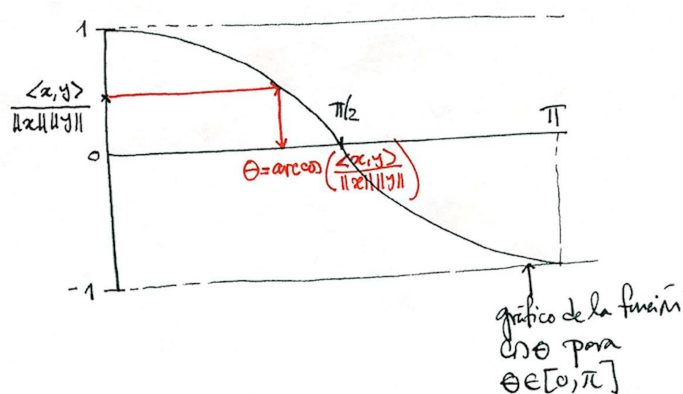
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

lo que modifica el contenido del **Teorema de Pitágoras**. Aquí vale que

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Además la **Desigualdad de Cauchy-Schwartz** para  $x, y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$  adopta la forma equivalente

$$(4) \quad -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

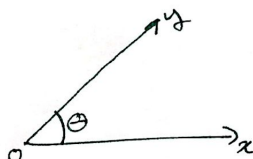


Como  $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$ , existe un único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

**Definición 2.1** (Ángulos). Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo. Para cada pareja  $x, y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ , definimos el ángulo entre  $x$  e  $y$ ,  $\theta = \angle(x, y)$ , mediante la fórmula

$$\theta := \arccos \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right).$$



Relación con la esfera unitaria.

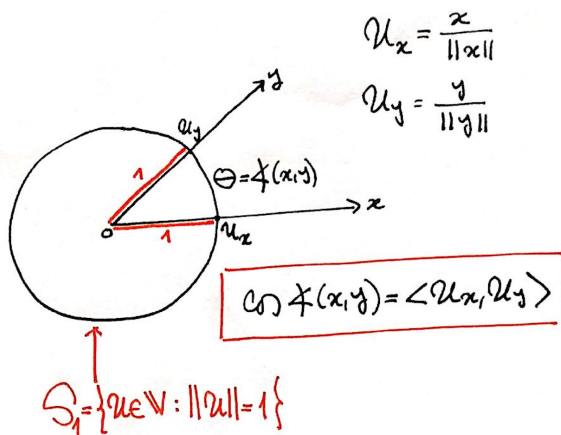
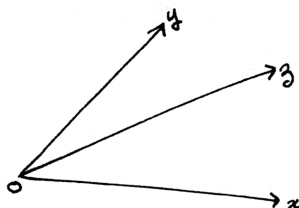


FIGURA 1. Nótese que  $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \langle u_x, u_y \rangle$ .

**Lema 2.2** (Aditividad). Sean  $x, y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$  dos vectores linealmente independientes y sea  $z = t_1 x + t_2 y$  con  $t_1, t_2 > 0$ .



Vale que

$$\angle(x, y) = \angle(x, z) + \angle(z, y).$$

*Demostración.* De acuerdo con la observación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} a &:= \langle u_x, u_y \rangle = \sphericalangle(x, y), \\ b &:= \langle u_x, u_z \rangle = \sphericalangle(x, z), \\ c &:= \langle u_z, u_y \rangle = \sphericalangle(z, y). \end{aligned}$$

Decir que

$$\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(x, z) + \sphericalangle(z, y)$$

es lo mismo que decir que

$$\arccos(a) = \arccos(b) + \arccos(c).$$

Se trata de probar que vale lo siguiente

$$(5) \quad a = \cos(\arccos(b) + \arccos(c)) = bc - \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}.$$

La segunda igualdad se obtiene recordando que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sen\theta_1 \sen\theta_2$$

y que  $\sen\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$  para cualquier  $\theta \in [0, \pi]$ .

Para demostrar (5) expresaremos los valores de  $b$  y  $c$  en función de  $a$ . Por hipótesis,  $u_z = s_1 u_x + s_2 u_y$  con  $s_1, s_2 > 0$ . En consecuencia,

$$(6) \quad b = \langle u_x, u_z \rangle = s_1 \langle u_x, u_x \rangle + s_2 \langle u_x, u_y \rangle = s_1 + s_2 a,$$

$$(7) \quad c = \langle u_z, u_y \rangle = s_1 \langle u_x, u_y \rangle + s_2 \langle u_y, u_y \rangle = s_2 + s_1 a.$$

Además,

$$(8) \quad 1 = \|u_z\|^2 = s_1^2 \|u_x\|^2 + s_2^2 \|u_y\|^2 + 2s_1 s_2 \langle u_x, u_y \rangle = s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 a$$

De (6) y (8) se deduce que

$$b^2 = s_1^2 + 2s_1 s_2 a + s_2^2 a^2 = 1 - s_2^2 + s_2^2 a = 1 - s_2^2(1 - a^2).$$

En consecuencia,

$$1 - b^2 = s_2^2(1 - a^2).$$

De la misma manera, usando (7) y (8), se comprueba que

$$1 - c^2 = s_1^2(1 - a^2).$$

Como  $s_1, s_2 > 0$  y  $1 - a^2 \geq 0$  se deduce que

$$\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2} = s_1 s_2(1 - a^2).$$

Por otra parte, usando (6) y (7) se obtiene que

$$bc = s_1 s_2 + (s_1^2 + s_2^2)a + s_1 s_2 a^2 = s_1 s_2(1 + a^2) + (s_1^2 + s_2^2)a.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} bc - \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2} &= s_1 s_2(1 - a^2) \\ &= 2s_1 s_2 a^2 + (s_1^2 + s_2^2)a \\ &= a(s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 a) \\ &= a. \end{aligned}$$

□

**Nota Bene.** Nótese que ahora  $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$  significa que el ángulo entre  $x$  e  $y$  es  $\frac{\pi}{2}$ . Lo que recupera la noción clásica de perpendicularidad.

## 2.2. Contenido geométrico de la tabla de multiplicar.

En lo que sigue consideramos la tabla de multiplicar de dos vectores linealmente independientes  $x$  e  $y$ :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$x$	$y$
$x$	$\langle x, x \rangle$	$\langle x, y \rangle$
$y$	$\langle y, x \rangle$	$\langle y, y \rangle$

Formalmente se la denomina la *matriz de Gram del conjunto*  $\{x, y\}$  y se la denota mediante  $G_{\{x,y\}}$ . Tenemos que

$$G_{\{x,y\}} = \begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{bmatrix}.$$

La información que proporcionan sus coeficientes es suficiente para analizar las propiedades geométricas del triángulo de vértices  $0, x, y$ . A partir de los mismos quedan unívocamente determinadas las longitudes de los lados  $\overline{0x}$ ,  $\overline{0y}$  y del ángulo  $\theta$  que forman entre ellos:

$$\ell_x = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \ell_y = \sqrt{\langle y, y \rangle}, \quad \cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

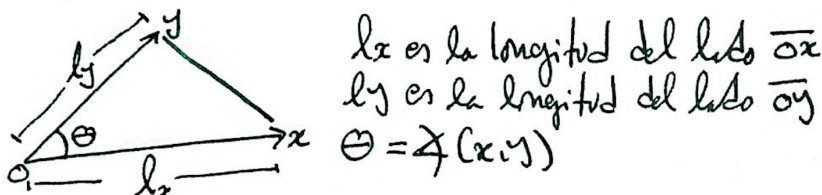


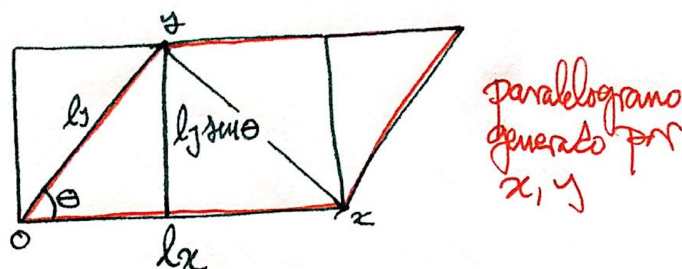
FIGURA 2. Información geométrica correspondiente al triángulo de vértices  $0, x, y$  proporcionada por la matriz de Gram de  $\{x, y\}$ :  
 $\langle x, x \rangle = \ell_x^2$ ,  $\langle y, y \rangle = \ell_y^2$ ,  $\langle x, y \rangle = \ell_x \ell_y \cos \theta$ .

**Nota Bene.** Nótese que la matriz de Gram de  $\{x, y\}$  puede expresarse en función de  $\ell_x, \ell_y, \theta$  mediante

$$(9) \quad G_{\{x,y\}} = \begin{bmatrix} \ell_x^2 & \ell_x \ell_y \cos \theta \\ \ell_x \ell_y \cos \theta & \ell_y^2 \end{bmatrix}.$$

De (9) se deduce que el determinante de  $G_{\{x,y\}}$  es el cuadrado del área del paralelogramo generado por los vectores  $x$  e  $y$ . En efecto,

$$(10) \quad \det(G_{\{x,y\}}) = \ell_x^2 \ell_y^2 - \ell_x^2 \ell_y^2 \cos^2 \theta = \ell_x^2 \ell_y^2 (1 - \cos^2 \theta) = \ell_x^2 \ell_y^2 \sin^2 \theta$$



El área del paralelogramo generado por los vectores  $x, y, l_x(l_y \text{ sen } \theta)$ , es el doble del área  $A$  del triángulo de vértices  $0, x, y$ . De la identidad

$$\det(G_{\{x,y\}}) = 4A^2$$

se deduce que

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\det(G_{\{x,y\}})}.$$

### 2.3. Primera descomposición ortogonal.

**Problema.** Dados  $x, y \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ , cómo debe ser  $\lambda \in \mathbb{R}$  para que la distancia entre  $\lambda x$  e  $y$  sea minimal.

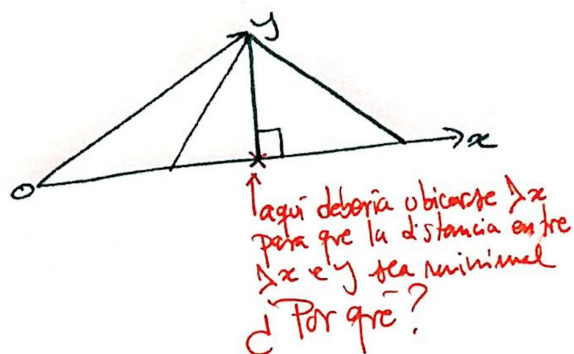


FIGURA 3. La figura indica que  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$  porque para ese valor vale que  $y - \lambda x \perp x$ .

Minimizar  $d(\lambda x, y) = \|y - \lambda x\|$  es equivalente a minimizar la  $\|y - \lambda x\|^2$ .

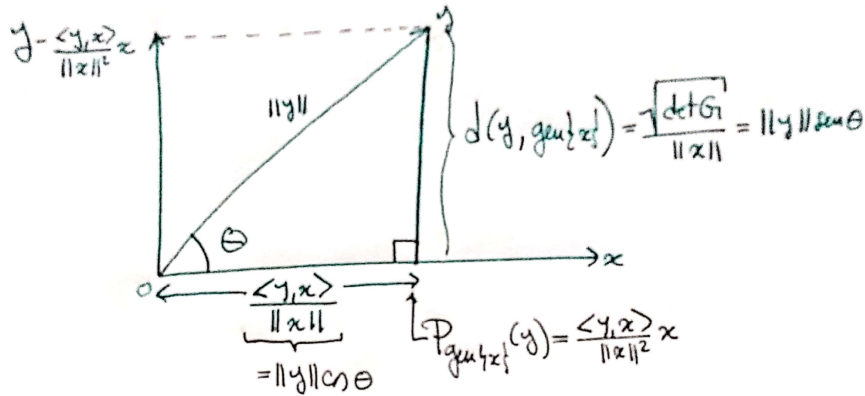
Observamos que

$$\begin{aligned}
 \|y - \lambda x\|^2 &= \|y\|^2 - 2\lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \|x\|^2 \\
 &= \|x\|^2 \left( \lambda^2 - 2\lambda \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} \right) \\
 &= \|x\|^2 \left[ \left( \lambda - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \right)^2 - \frac{\langle y, x \rangle^2}{\|x\|^4} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} \right] \\
 &= \underbrace{\|x\|^2 \left( \lambda - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \right)^2}_{\geq 0} + \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle y, x \rangle^2}{\|x\|^2}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el mínimo de  $\|y - \lambda x\|$  se alcanza en  $\lambda = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}$  y el valor mínimo alcanzado es:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|y - \lambda x\| = \frac{\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}}{\|x\|} = \|y\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde  $\theta = \angle(x, y)$ .



**Nota Bene.** Nótese que  $\mathbb{V} = \text{gen}\{x\} \oplus x^\perp$ . Esto es así porque  $\text{gen}\{x\} \cap x^\perp = \{0\}$  y para cada  $y \in \mathbb{V}$  vale que

$$y = \underbrace{\frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x}_{\in \text{gen}\{x\}} + \underbrace{\left( y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x \right)}_{\in x^\perp}$$

#### 2.4. Validez del quinto postulado.

**Lema 2.3.** Si  $v_1$  y  $v_2$  son dos vectores linealmente independientes tales que  $v_1 = P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2)$ , entonces el triángulo de vértices  $0, v_1, v_2$  es un triángulo rectángulo de catetos  $0v_1, \overline{v_1 v_2}$

*Demostración.* Basta observar que  $v_2 - v_1 = v_2 - P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2) \perp v_1$ .  $\square$

**Lema 2.4.** Sean  $v_1$  y  $v_2$  dos vectores linealmente independientes tales que  $v_1 = P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2)$ . Si  $\alpha = \angle(v_1, v_2)$  y  $\beta = \angle(v_2, v_2 - v_1)$ , entonces

$$(11) \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

*Demostración.* Se deduce de la figura siguiente.

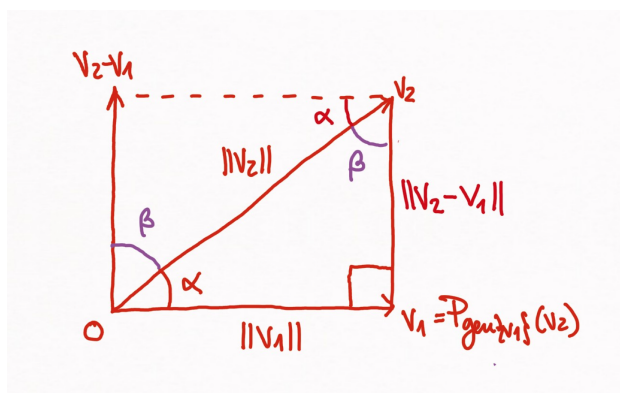


FIGURA 4. De la relación  $\cos \beta = \frac{\|v_2 - v_1\|}{\|v_2\|} = \sin \alpha$ , con  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  se deduce que  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Decir que  $v_2 - v_1 \perp v_1$  equivale a decir que  $0 = \langle v_2, v_1 \rangle - \|v_1\|^2$  y en consecuencia, tenemos que  $\langle v_2, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 > 0$ . De aquí se infiere que

$$(12) \quad \cos \alpha = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_2\| \|v_1\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v_2\|}.$$

En consecuencia  $\cos \alpha > 0$  y por lo tanto,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Por otra parte, tenemos que

$$(13) \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2}}{\|v_2\|}$$

porque el coseno  $\beta$  es igual a la longitud del cateto adyacente sobre la longitud de la hipotenusa. El cateto adyacente mide  $\|v_2 - v_1\|$ , la hipotenusa mide  $\|v_2\|$  y el cateto opuesto mide  $\|v_1\|$ . El Teorema de Pitágoras indica que  $\|v_2 - v_1\|^2 + \|v_1\|^2 = \|v_2\|^2$ .

De (13) y (12) resulta que

$$(14) \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2}}{\|v_2\|} = \sqrt{1 - \frac{\|v_1\|^2}{\|v_2\|^2}} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha.$$

Como  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  la relación (14) sólo es posible para

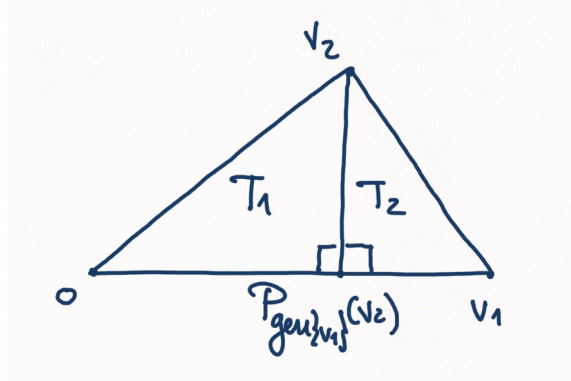
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Esto es así porque

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

y la función coseno es inyectiva en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . □

**Lema 2.5.** Sean  $v_1$  y  $v_2$  dos vectores linealmente independientes. El triángulo de vértices  $0, v_1, v_2$  se puede descomponer en dos triángulos rectángulos contiguos.



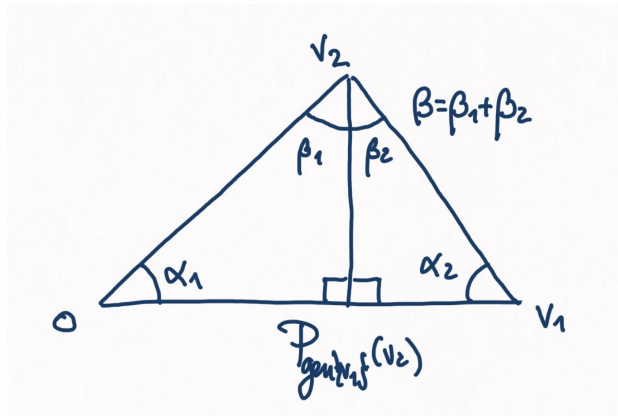
*Demostración.* No se pierde generalidad si se supone que  $\|v_1\| \geq \|v_2\|$ . Si  $T$  designa al triángulo vertices  $0, v_1, v_2$ , se puede ver que los triángulos,  $T_1$ , de vértices  $0, P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2$ , y  $T_2$ , de vértices  $P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2, v_1$  satisfacen que

$$T_1 \cup T_2 = T \text{ y } T_1 \cap T_2 = \overline{P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2}.$$

□

**Teorema 2.6** (Postulado V). Sea  $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo. Si  $v_1$  y  $v_2$  son dos vectores linealmente independientes, entonces la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices  $0, v_1, v_2$  es  $\pi$ .

*Demostración.* Es consecuencia inmediata de los **Lemas 2.5, 2.4, 2.2**.



Etiquetamos los ángulos internos mediante  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ . Utilizamos el **Lema 2.5** para separar al triángulo en dos triángulos rectángulos. Utilizamos el **Lema 2.2** para descomponer a  $\beta$  en dos partes  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . El **Lema 2.4** nos informa que  $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = \pi$ . □