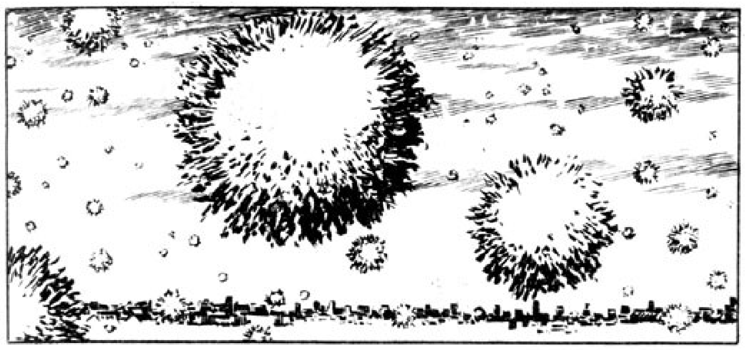
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 20 de octubre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo",
nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Matrices de Gram

En todo lo que sigue $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo.

Definición 1.1. *La tabla de multiplicar de una familia de vectores* $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ *se llama* la matriz de Gram de $\mathcal{X}$ *y se denota por* $G_{\mathcal{X}}$*,*

$$G_{\mathcal{X}} := [\langle x_i, x_j\rangle]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n \\ j\in\mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.2. *Sea* $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$*. La matriz de Gram de* $\mathcal{B}$ *determina unívocamente al producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *y se llama* la matriz del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ respecto de la base $\mathcal{B}$*.*

Demostración. Sean x e y dos vectores de $\mathbb{V}$ cuyos vectores de coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ son $[x]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$, $[y]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{bmatrix}^T$. Vale que

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle v_i, v_j\rangle \right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle v_1, v_j\rangle \\ \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle v_2, v_j\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle v_n, v_j\rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^n \overline{y_j} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_j\rangle \\ \langle v_2, v_j\rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v_j\rangle \end{bmatrix} \right) = [x]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} \overline{[y]^{\mathcal{B}}}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3. Consideramos $\mathbb{R}[x]$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

y calculamos los productos internos $\langle x^i, x^j\rangle$ con $i, j \in \mathbb{N}_0$:

$$\langle x^i, x^j\rangle = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}.$$

La matriz de Gram del conjunto $\mathcal{L} = \{1, x, x^2\}$ es

$$G_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Su determinante vale $\frac{1}{2160}$ y su matriz inversa es

$$G_{\mathcal{L}}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Lema 1.4. *Si $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces la matriz de Gram de $\mathcal{L}$ es inversible.*

Demostración. Basta ver que el sistema de ecuaciones $G_{\mathcal{L}}\overline{x} = 0$, con $x \in \mathbb{K}^n$ es compatible determinado. Si $G_{\mathcal{L}}\overline{x} = 0$, entonces $x^T G_{\mathcal{L}}\overline{x} = 0$. Como

$$\begin{aligned}
x^T G_{\mathcal{L}}\overline{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \overline{x_j}\, \langle v_1, v_j\rangle \\ \sum_{j=1}^n \overline{x_j}\, \langle v_2, v_j\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \overline{x_j}\, \langle v_n, v_j\rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle v_1, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle \\ \left\langle v_2, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle v_n, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\|^2,
\end{aligned}$$

tenemos que $G_{\mathcal{L}}\overline{x} = 0$, implica que $\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$. Siendo $\mathcal{L}$ un conjunto linealmente independiente, se concluye que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. □

2. Ortogonalidad

En todo lo que sigue $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo.

2.1. Preliminares.

Para cada $w \in \mathbb{V}$ definimos $\{w\}^\perp$ como el conjunto de todos los vectores $v \in \mathbb{V}$ que son ortogonales al vector w:

$$\{w\}^\perp = \{v \in \mathbb{V} : \langle v, w\rangle = 0\}.$$

Nota Bene. Nótese que $\{w\}^\perp$ es un subespacio. Esto es así porque

$$\{w\}^\perp = \mathrm{Nu}(\phi_w),$$

donde $\phi_w : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ es la funcional lineal definida por

$$\phi_w(v) = \langle v, w\rangle.$$

Nótese también que

$$\{0_{\mathbb{V}}\}^{\perp} = \mathbb{V}.$$

Esto es así porque

$$\langle v, 0_{\mathbb{V}} \rangle = \langle v, 0_{\mathbb{K}} \cdot 0_{\mathbb{V}} \rangle = \overline{0_{\mathbb{K}}} \langle v, 0_{\mathbb{V}} \rangle = 0_{\mathbb{K}}.$$

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{G}$ un conjunto no vacío de vectores de $\mathbb{V}$. Definimos* el subespacio ortogonal a $\mathcal{G}$ *mediante*

$$\mathcal{G}^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} : \langle v, w \rangle = 0, \ \textit{para todo } \ w \in \mathcal{G}\} = \bigcap_{w \in \mathcal{G}} \{w\}^{\perp}.$$

Lema 2.2. *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración. Que $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp} = \{0\}$ es inmediato de observar que si $v \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp}$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$ y de allí se infiere que $v = 0$. □

Lema 2.3. *Sean $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión m, y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de $\mathbb{S}$. Vale que*

$$\mathbb{S}^{\perp} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^{\perp}$$

Demostración. La relación $\mathbb{S}^{\perp} \subseteq \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^{\perp}$ se deduce inmediatamente de la relación $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subset \mathbb{S}$. Veamos ahora que $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^{\perp} \subseteq \mathbb{S}^{\perp}$. Para esto basta comprobar que si $u \in \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^{\perp}$ y $v \in \mathbb{S}$, entonces $\langle v, u \rangle = 0$. Como $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es una base de $\mathbb{S}$ todo vector $v \in \mathbb{S}$ se escribe de manera única en la forma $v = \sum_{j=1}^{m} a_j w_j$, de allí que si $u \in \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^{\perp}$ se tenga que

$$\langle v, u \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} a_j w_j, u \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} a_j \langle w_j, u \rangle = 0.$$

□

Definición 2.4. *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y sea $\mathcal{W}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$. Para cada $v \in \mathbb{V}$,* la distancia entre v y $\mathcal{W}$ *se define por*

$$d(v, \mathcal{W}) := \inf_{w \in \mathcal{W}} \|v - w\|.$$

2.2. Mejor aproximación.

Consideramos un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y un subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{V}$. Sea $v \in \mathbb{V}$ un vector arbitrario pero fijo. El problema consiste en hallar una mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$. Esto significa que se desea encontrar un vector $w_v \in \mathbb{S}$ cuya distancia a v sea la menor posible.

Definición 2.5. *Sean $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo, $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, y $v \in \mathbb{V}$ un vector arbitrario pero fijo. Decimos que $w_v \in \mathbb{S}$* es una mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$ *si y solamente si*

$$\|v - w_v\| \leq \|v - w\| \ \ \textit{para todo } \ w \in \mathbb{S} \tag{1}$$

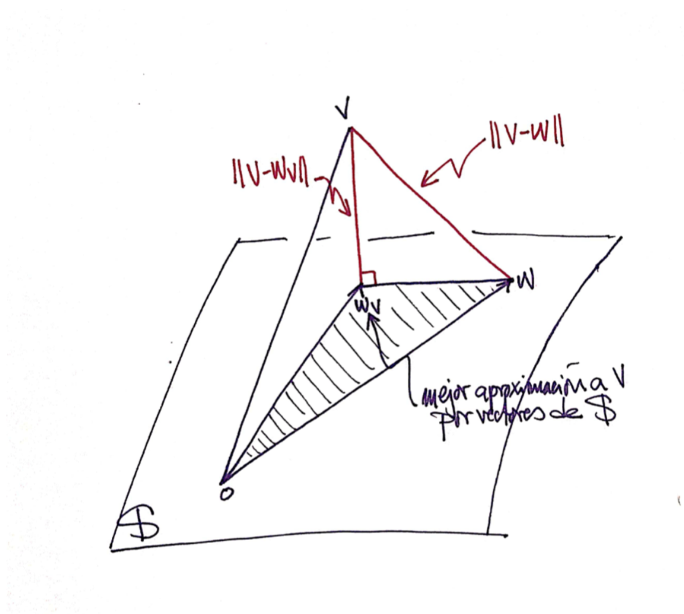


FIGURA 1. Mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$.

Lema 2.6. *Sea* $\mathbb{S}$ *un subespacio de un espacio euclídeo* $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *y sea* v *un vector de* $\mathbb{V}$. *Si* $w_v \in \mathbb{S}$ *es una mejor aproximación a* v *por vectores de* $\mathbb{S}$, *entonces* $v - w_v \in \mathbb{S}^\perp$.

Demostración. Basta probar que para todo $w \in \mathbb{S}$ vale que

$$v - w_v \perp w - w_v. \tag{2}$$

En otras palabras, basta probar que

$$P_{\text{gen}\{w-w_v\}}(v - w_w) = 0$$

para todo $w \in \mathbb{S} \setminus \{w_v\}$.

Como la única herramienta que tenemos para hacer eso es la desigualdad (1) vamos a calcular la distancia entre el vector $w = w_v + P_{\text{gen}\{w-w_v\}}(v - w_w) \in \mathbb{S}$ y el vector v. Para simplificar la escritura introducimos la siguiente notación: $w = w_v + \varepsilon$, con $\varepsilon = P_{\text{gen}\{w-w_v\}}(v - w_w)$.

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= \|v - (w_v + \varepsilon)\|^2 = \|(v - w_v) - \varepsilon\|^2 \\ &= \|v - w_v\|^2 + \|\varepsilon\|^2 - 2\text{Re}\,\langle v - w_v, \varepsilon \rangle\,.\end{aligned}$$

Utilizamos la desigualdad (1) y deducimos que

$$\|\varepsilon\|^2 - 2\text{Re}\,\langle v - w_v, \varepsilon \rangle \geq 0. \tag{3}$$

Como

$$\varepsilon = P_{\text{gen}\{w-w_v\}}(v - w_w) = \frac{\langle v - w_v, w - w_v \rangle}{\|w - w_v\|^2}(w - w_v),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\langle v - w_v, \varepsilon\rangle &= \left\langle v - w_v, \frac{\langle v - w_v, w - w_v\rangle}{\|w - w_v\|^2}(w - w_v)\right\rangle \\ &= \overline{\frac{\langle v - w_v, w - w_v\rangle}{\|w - w_v\|^2}}\,\langle v - w_v, w - w_v\rangle \\ &= \frac{|\langle v - w_v, w - w_v\rangle|^2}{\|w - w_v\|^2} \\ &= \|\varepsilon\|^2.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\varepsilon\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle v - w_v, \varepsilon\rangle = \|\varepsilon\|^2 - 2\|\varepsilon\|^2 = -\|\varepsilon\|^2. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce que $\|\varepsilon\| = 0$, y de aquí se infiere que $\varepsilon = 0$. Por lo tanto,

$$P_{\mathrm{gen}\{w - w_v\}}(v - w_w) = 0.$$

□

Lema 2.7. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y sea v un vector de $\mathbb{V}$. Si existe una mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$, entonces es única.*

Demostración. Si $w_1, w_2 \in \mathbb{S}$ son mejores aproximaciones a v por vectores de $\mathbb{S}$, tenemos que $v - w_1 \in \mathbb{S}^\perp$ y que $v - w_2 \in \mathbb{S}^\perp$. Como $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio también tenemos que $w_2 - w_1 \in \mathbb{S}^\perp$. Como $w_2 - w_1 \in \mathbb{S}$, resulta que $w_2 - w_1 \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp = \{0\}$. Por lo tanto, $w_2 = w_1$. □

Lema 2.8. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y sea v un vector de $\mathbb{V}$. Si existe $w_v \in \mathbb{S}$ tal que $v - w_v \in \mathbb{S}^\perp$, entonces w_v es la mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$.*

Demostración. Usando el Teorema de Pitágoras puede verse que para todo $w \in \mathbb{S}$ vale que

$$\|v - w\|^2 = \|(v - w_v) + (w_v - w)\|^2 = \|v - w_v\|^2 + \|w_v - w\|^2 \geq \|v - w_v\|^2.$$

□

2.3. Proyecciones ortogonales.

Definición 2.9. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y sea v un vector de $\mathbb{V}$. Si existe,* la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathbb{S}$ *es el único vector $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ tal que $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$.*

Nota Bene. Nótese que, cuando existe, la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathbb{S}$ es la mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$. Como la distancia entre v y $P_{\mathbb{S}}(v)$ satisface que

$$\|v - P_{\mathbb{S}}(v)\| = \min_{w \in \mathbb{S}} \|v - w\|,$$

la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$ es el único vector de $\mathbb{S}$ que realiza la distancia entre v y $\mathbb{S}$. Esto es,

$$d(v, \mathbb{S}) = \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|.$$

Teorema 2.10. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio no trivial de un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si la dimensión de $\mathbb{S}$ es finita, entonces para cada $v \in \mathbb{V}$ existe la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$.*

Demostración. Como la dimensión de $\mathbb{S}$ es finita y $\mathbb{S} \neq \{0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(\mathbb{S}) = n$. Para probar la existencia de $P_{\mathbb{S}}(v)$, la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$, elegimos una base cualquiera $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y la construimos explícitamente.

Decir que existe $P_{\mathbb{S}}(v)$ significa que existe un vector $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ tal que $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Ese vector se tiene que poder representar de manera única como una combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$

$$P_{\mathbb{S}}(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

y tiene que ser la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\begin{cases} 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_1 \rangle = \langle v, w_1 \rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_1 \rangle, \\ 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_2 \rangle = \langle v, w_2 \rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_2 \rangle, \\ \qquad \vdots \\ 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_n \rangle = \langle v, w_n \rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_n \rangle. \end{cases}$$

O lo que es equivalente

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_1, w_j \rangle} = \langle v, w_1 \rangle, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_2, w_j \rangle} = \langle v, w_2 \rangle, \\ \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_n, w_j \rangle} = \langle v, w_n \rangle. \end{cases}$$

Esto significa que sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, tienen que ser la solución del sistema

$$\underbrace{\overline{\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, w_n \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, w_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_n, w_1 \rangle & \langle w_n, w_2 \rangle & \cdots & \langle w_n, w_n \rangle \end{bmatrix}}}_{\text{matriz de Gram de la base } \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \langle v, w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_n \rangle \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Como $\overline{G_{\mathcal{B}}} = G_{\mathcal{B}}^T$ y la matriz de Gram de $\mathcal{B}$ es inversible, el sistema (5) tiene única solución y la misma se obtiene multiplicando ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de $G_{\mathcal{B}}^T$.

Por lo tanto, la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$ existe y su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}$ está determinado por

$$[P_{\mathbb{S}}(v)]^{\mathcal{B}} = (G_{\mathcal{B}}^T)^{-1} \tilde{v},$$

donde $G_{\mathcal{B}}$ es la matriz de Gram de la base $\mathcal{B}$ y $\tilde{v} \in \mathbb{K}^n$ es el vector definido por $\tilde{v} = \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle & \langle v, w_2 \rangle & \cdots & \langle v, w_n \rangle \end{bmatrix}^T$. $\square$

Nota Bene. Nótese que si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo, entonces $G_{\mathcal{B}}^T = G_{\mathcal{B}}$.

Comentario. Como la prueba del **Teorema 2.10** es constructiva, proporciona un método para encontrar la proyección ortogonal de cualquier vector $v \in \mathbb{V}$ sobre el subespacio $\mathbb{S}$.

Ejemplo 2.11. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Queremos determinar el punto del plano $\mathbb{S} = \text{gen}\{w_1, w_2\}$ más cercano al vector $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, donde

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T,$$

y también queremos determinar la distancia de b al plano $\mathbb{S}$.

El punto del plano $\mathbb{S}$ más cercano a b es la proyección ortogonal de b a $\mathbb{S}$. Para calcularla elegimos la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{S}$ y usamos que

$$[P_{\mathbb{S}}(b)]^{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \|w_1\|^2 & \langle w_1, w_2\rangle \\ \langle w_2, w_1\rangle & \|w_2\|^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{G_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} \langle b, w_1\rangle \\ \langle b, w_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el punto del plano $\mathbb{S}$ más cercano a b es

$$P_{\mathbb{S}}(b) = \frac{5}{9}w_1 + \frac{1}{9}w_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 7 \end{bmatrix}^T.$$

La distancia de b a $\mathbb{S}$ es

$$d(b, \mathbb{S}) = \|b - P_{\mathbb{S}}(b)\| = \left\| \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{9} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 2.12. En $\mathbb{R}[x]$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

consideramos el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor que 3. Para calcular la proyección ortogonal de un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ sobre el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$ elegimos la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ y usamos que

$$\left[P_{\mathbb{R}_2[x]}(p)\right]^{\mathcal{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{E}}^{-1}} \begin{bmatrix} \langle p, 1\rangle \\ \langle p, x\rangle \\ \langle p, x^2\rangle \end{bmatrix}.$$

Para fijar ideas, pongamos $p = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$. En tal caso tenemos que

$$\begin{bmatrix} \langle p, 1\rangle \\ \langle p, x\rangle \\ \langle p, x^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x^k, 1\rangle \\ \langle x^k, x\rangle \\ \langle x^k, x^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(k+1) \\ 1/(k+2) \\ 1/(k+3) \end{bmatrix}.$$

Nos queda que

$$\begin{aligned} \left[P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^k\right)\right]^{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(k+1) \\ 1/(k+2) \\ 1/(k+3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)} \begin{bmatrix} (k-1)(k-2) \\ -8k(k-2) \\ 10k(k-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^k\right) = \frac{3(k-1)(k-2) - 24k(k-2)x + 30k(k-1)x^2}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^3\right) &= \frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2, \\ P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^4\right) &= \frac{3}{35} - \frac{32}{35}x + \frac{12}{7}x^2, \\ P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^5\right) &= \frac{3}{28} - \frac{15}{14}x + \frac{25}{14}x^2. \end{aligned}$$

Para calcular la distancia de x^5 a $\mathbb{R}_2[x]$ usamos que

$$\begin{aligned} d\left(x^5, \mathbb{R}_2[x]\right) &= \left\|x^5 - P_{\mathbb{R}_2[x]}\left(x^5\right)\right\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^5 - \frac{3}{28} + \frac{15}{14}x - \frac{25}{14}x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{25}{8624}} \\ &\approx 0.054. \end{aligned}$$

Corolario 2.13. *Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ es un subespacio no trivial de dimensión finita, entonces la aplicación $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que a cada vector $v \in \mathbb{V}$ le asigna su proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}$,*

$$v \mapsto P_{\mathbb{S}}(v),$$

es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$.

Demostración. Por construcción tenemos que

$$P_{\mathbb{S}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ T \circ \Psi,$$

donde

$\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$ es el isomorfismo de coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$,
$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es la transformación lineal definida por $T(x) := (G_{\mathcal{B}}^T)^{-1}x$,
$\Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$ es la transformación lineal definida por

$$\Psi(v) := \begin{bmatrix} \langle v, w_1\rangle & \langle v, w_2\rangle & \cdots & \langle v, w_n\rangle \end{bmatrix}^T.$$

□

Nota Bene. Nótese que

$$\mathrm{Im}(P_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S} \quad \text{y} \quad \mathrm{Nu}(P_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}^{\perp}.$$

2.4. Segunda descomposición ortogonal.

Lema 2.14. *Sean $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo y $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Si existe, $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, la proyección ortogonal de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{S}$, entonces*

$$\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}. \tag{6}$$

Demostración. Esto es así porque $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp} = \{0\}$ y para cada $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$v = \underbrace{P_{\mathbb{S}}(v)}_{\in \mathbb{S}} + \underbrace{(v - P_{\mathbb{S}}(v))}_{\in \mathbb{S}^{\perp}}.$$

□

Lema 2.15. *Sean* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio euclídeo y* $\mathbb{S}$ *un subespacio de* $\mathbb{V}$ *tal que*

$$\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp},$$

entonces existe $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$*, la proyección ortogonal de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}$*. Más aún,*

$$P_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{S}\mathbb{S}^{\perp}}$$

es la proyección de $\mathbb{V}$ *sobre el subespacio* $\mathbb{S}$ *en la dirección del subespacio* $\mathbb{S}^{\perp}$*.*

Demostración. Inmediata por definición de $\Pi_{\mathbb{S}\mathbb{S}^{\perp}}$. □

Teorema 2.16. *Sean* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio euclídeo y* $\mathbb{S}$ *un subespacio de* $\mathbb{V}$*. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *Existe la proyección ortogonal de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}$*.*
2. $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}$*.*

Más aún, en caso de que alguna de las dos proposiciones sea verdadera –y por lo tanto, también la otra lo sea– vale que

$$P_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{S}\mathbb{S}^{\perp}}.$$

Nota Bene. Nótese que si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}$, entonces $(\mathbb{S}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{S}$. (Ejercicio).

Corolario 2.17. *Sean* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio euclídeo y* $\mathbb{S}$ *un subespacio de dimensión finita de* $\mathbb{V}$*. Entonces,*

1. *Existe la proyección ortogonal de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}$ *y vale que*
$$P_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{S}\mathbb{S}^{\perp}}.$$
2. *Existe la proyección ortogonal de* $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}^{\perp}$ *y vale que*
$$P_{\mathbb{S}^{\perp}} = I_{\mathbb{V}} - P_{\mathbb{S}}.$$

Demostración. Es consecuencia directa del **Teorema 2.16** y de la existencia de la proyección ortogonal de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{S}$. □

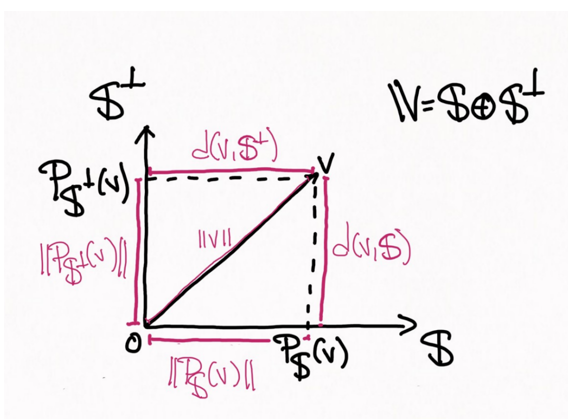


FIGURA 2. Segunda descomposición ortogonal. Si $\dim(\mathbb{S}) < \infty$ vale que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}$.

Nota Bene. Nótese que cuando $\dim(\mathbb{S}) < \infty$ valen las siguientes relaciones

1. $v = P_{\mathbb{S}}(v) + P_{\mathbb{S}^\perp}(v)$,
2. $d(v, \mathbb{S}) = \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\| = \|P_{\mathbb{S}^\perp}(v)\|$,
3. $d(v, \mathbb{S}^\perp) = \|v - P_{\mathbb{S}^\perp}(v)\| = \|P_{\mathbb{S}}(v)\|$,
4. $\|v\|^2 = \|P_{\mathbb{S}}(v)\|^2 + \|P_{\mathbb{S}^\perp}(v)\|^2$,
5. $\|v\|^2 = d^2(v, \mathbb{S}) + d^2(v, \mathbb{S}^\perp)$.

Ejemplo 2.18. En $\mathbb{R}[x]$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

queremos calcular la distancia de x^5 al complemento ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$.

Aprovechamos que sabemos que

$$d\left(x^5, \mathbb{R}_2[x]\right) = \sqrt{\frac{25}{8624}},$$

y usamos la quinta relación de la nota precedente. Como

$$d^2\left(x^5, \mathbb{R}_2[x]^\perp\right) = \left\|x^5\right\|^2 - d^2\left(x^5, \mathbb{R}_2[x]\right) = \frac{1}{11} - \frac{25}{8624} = \frac{69}{784},$$

tenemos que

$$d\left(x^5, \mathbb{R}_2[x]^\perp\right) = \sqrt{\frac{69}{784}} \approx 0.297.$$

Ejemplo 2.19 (Malas noticias)**.** Se puede probar que el conjunto

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión infinita.

También se puede probar que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

define un producto interno en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Si se considera el subespacio $\mathbb{S}_0$ de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ que se anulan salvo en una cantidad finita de términos

$$\mathbb{S}_0 = \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0\ \forall\, n \geq n_0 \right\},$$

se puede ver que $\mathbb{S}_0^\perp = \{0\}$.

Por otra parte, también se puede ver que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, pertenece a $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{S}_0$. Motivo por el cual

$$\ell^2(\mathbb{N}) \neq \mathbb{S}_0 \oplus \mathbb{S}_0^\perp.$$

Nota Bene. Este ejemplo muestra que la existencia de la proyección ortogonal sobre un subespacio cualquiera en un espacio de dimensión infinita no está garantizada porque la existencia de la misma equivale a la descomposición del espacio en suma directa del subespacio y su complemento ortogonal.