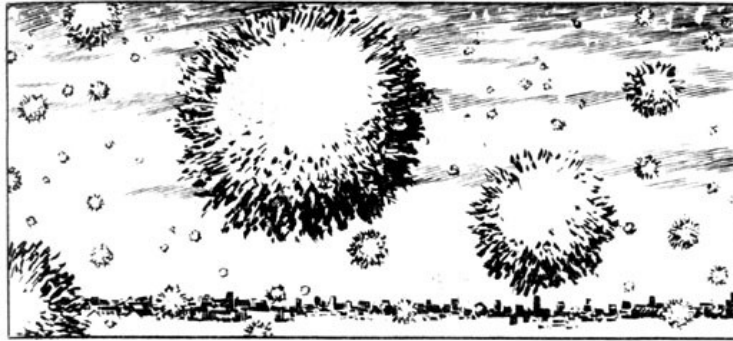

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2020
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 27 DE OCTUBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Sistemas ortogonales	2
1.1. Introducción	2
1.2. Bases ortogonales en espacios de dimensión finita	2
1.3. Coordenadas respecto de una base ortogonal	3
1.4. Miniatura	4
1.5. Proyecciones ortogonales	6
1.6. Sistemas ortonormales y desarrollos de Fourier	7
1.7. Desarrollos de Fourier de funciones continuas o cuadrado integrables	9

1. SISTEMAS ORTOGONALES

1.1. Introducción.

En todo lo que sigue $\mathbb{I} \neq \emptyset$ será un conjunto cualquiera de índices y $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ será un espacio euclídeo.

Definición 1.1. Un sistema de vectores $\{w_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama ortogonal, cuando

$$\langle w_i, w_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Si además, la norma de cada elemento w_i es igual a 1, el sistema $\{w_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama ortonormal

Lema 1.2. Todo sistema ortogonal $\{w_i : i \in \mathbb{I}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. En efecto, si

$$a_{i_1} w_{i_1} + a_{i_2} w_{i_2} + \cdots + a_{i_n} w_{i_n} = 0,$$

donde $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \mathbb{I}$ es un conjunto finito de índices distintos dos a dos, entonces

$$\langle a_{i_1} w_{i_1} + a_{i_2} w_{i_2} + \cdots + a_{i_n} w_{i_n}, w_{i_k} \rangle = a_{i_k} \langle w_{i_k}, w_{i_k} \rangle = 0,$$

y puesto que $\langle w_{i_k}, w_{i_k} \rangle \neq 0$, porque $w_{i_k} \neq 0$, tenemos que $a_{i_k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{I}_n$. \square

Nota Bene. Nótese que si $\dim(\mathbb{V}) = n$ cualquier sistema ortogonal $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ es una base de \mathbb{V} .

1.2. Bases ortogonales en espacios de dimensión finita.

Definición 1.3. Sea \mathcal{B} una base de un espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimensión finita. Decimos que \mathcal{B} es una base ortogonal si sus elementos constituyen un sistema ortogonal. Si además, la norma de cada elemento de \mathcal{B} es igual a 1, decimos que \mathcal{B} es una base ortonormal.

Ejemplo 1.4. La base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno canónico,

$$\langle x, y \rangle = y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ejemplo 1.5. La base de polinomios interpoladores de Lagrange correspondiente al conjunto de abscisas $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$,

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \prod_{k \in \mathbb{I}_m : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} : i \in \mathbb{I}_m \right\},$$

es una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}_{m-1}[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^m p(x_i) q(x_i).$$

1.3. Coordenadas respecto de una base ortogonal.

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base ortogonal de \mathbb{V} . Para cada $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$[v]^{\mathcal{B}} = \left[\frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \quad \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \quad \dots \quad \frac{\langle v, w_n \rangle}{\|w_n\|^2} \right]^T.$$

En efecto, como $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortogonal tenemos que si

$$v = \sum_{j=1}^n a_j w_j,$$

para cada $k \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\langle v, w_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j, w_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle w_j, w_k \rangle = a_k \|w_k\|^2.$$

Despejando, obtenemos que $a_k = \frac{\langle v, w_k \rangle}{\|w_k\|^2}$ para todo $k \in \mathbb{I}_n$. Por lo tanto,

$$(1) \quad v = \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

□

Nota Bene. Nótese que, si $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{V} , para cada $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$[v]^{\mathcal{U}} = [\langle v, u_1 \rangle \quad \langle v, u_2 \rangle \quad \dots \quad \langle v, u_n \rangle]^T.$$

En consecuencia,

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j$$

y, debido Teorema de Pitágoras, también vale que

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\langle v, u_j \rangle u_j\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, u_j \rangle|^2 \|u_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\langle v, u_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Teorema 1.6. Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espacio euclídeo de dimensión n y sea $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio de coordenadas n dimensional con el producto interno canónico. Si $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} , entonces el isomorfismo de coordenadas $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ es una isometría, esto es

$$\|\Phi_{\mathcal{U}}(v)\| = \|v\| \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}.$$

Nota Bene. Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} . Nótese que si $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e $y = \sum_{j=1}^n y_j u_j$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

Formalizamos la observación en la forma del siguiente Lema

Lema 1.7. Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} . Para cada $x, y \in \mathbb{V}$ vale que

$$\langle x, y \rangle = \langle [x]^{\mathcal{U}}, [y]^{\mathcal{U}} \rangle_{\mathbb{K}^n} = ([y]^{\mathcal{U}})^* [x]^{\mathcal{U}},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n}$ es el producto interno canónico de \mathbb{K}^n .

Nota Bene. El lema anterior nos permite observar que cuando $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ son dos bases ortonormales de \mathbb{V} , la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B} en la base \mathcal{U} , $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}$, satisface que

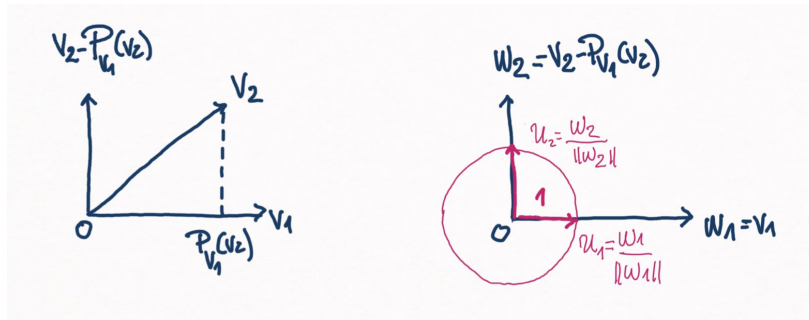
$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^*.$$

Esto es así porque

$$((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^* M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})_{ij} = ([v_i]^{\mathcal{U}})^* [v_j]^{\mathcal{U}} = \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1.4. Miniatura.

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 2 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de \mathbb{V} . En la siguiente figura se muestra cómo se puede construir una base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ de \mathbb{V} a partir de la base \mathcal{B} .



Circunferencia unitaria. Fijada una base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ de \mathbb{V} , los puntos de la circunferencia unitaria

$$S_1 = \{x \in \mathbb{V} : \|x\| = 1\}$$

tienen la siguiente forma $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$, con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tales que

$$1 = \|x\|^2 = \|x_1 u_1 + x_2 u_2\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Recuperamos así la representación geométrico analítica de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{V} : \|x\| = 1\} = \left\{x \in \mathbb{V} : [x]^u = [x_1 \quad x_2]^T \text{ con } x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}.$$

En otras palabras,

$$x \in S_1 \iff x = (\cos \theta)u_1 + (\sen \theta)u_2, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Ejemplo 1.8. Construir una base ortonormal del subespacio

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_G x.$$

Resolución. Elegimos una base $\mathcal{B}_{\mathbb{S}} = \{v_1, v_2\}$ del subespacio \mathbb{S} , por ejemplo aquella cuyos elementos son $v_1 = [1 \quad -1 \quad 0]^T$ y $v_2 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$. Definimos $w_1 = v_1$ y calculamos w_2 usando el procedimiento que se muestra en la figura:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Hacemos las cuentas,

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= v_1^T G v_1 = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [4 \quad -7 \quad -4] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 11, \\ \langle v_2, v_1 \rangle &= v_1^T G v_2 = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [4 \quad -7 \quad -4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 8, \end{aligned}$$

y obtenemos

$$w_2 = [1 \quad 0 \quad -1]^T - \frac{8}{11} [1 \quad -1 \quad 0]^T = \frac{1}{11} [3 \quad 8 \quad -11]^T$$

Como

$$\begin{aligned} \|w_2\|^2 &= w_2^T G w_2 = \frac{1}{121} [3 \quad 8 \quad -11] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{121} [-10 \quad -10 \quad -34] \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{bmatrix} = \frac{264}{121}, \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de \mathbb{S} , donde

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} [1 \quad -1 \quad 0]^T, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{264}} [3 \quad 8 \quad -11]^T.$$

1.5. Proyecciones ortogonales.

Teorema 1.9. Sean $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo y $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión m . Si $\mathcal{B}_{\mathbb{S}} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, es una base ortogonal de \mathbb{S} , entonces para cada $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$(2) \quad P_{\mathbb{S}}(v) = \sum_{j=1}^m \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

es la proyección ortogonal de v sobre \mathbb{S} .

Demostración. Basta comprobar que

$$v - \sum_{j=1}^m \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \in \mathbb{S}^{\perp}.$$

En efecto, puesto que $\mathcal{B}_{\mathbb{S}}$ es una base ortogonal de \mathbb{S} , tenemos que $\langle w_j, w_k \rangle = 0$ para todo $j \neq k$, en consecuencia, para cada $k \in \mathbb{I}_m$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle v - \sum_{j=1}^m \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j, w_k \right\rangle &= \langle v, w_k \rangle - \sum_{j=1}^m \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \langle w_j, w_k \rangle \\ &= \langle v, w_k \rangle - \frac{\langle v, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} \|w_k\|^2 = 0. \end{aligned}$$

La prueba está concluida porque $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}^{\perp} = \mathbb{S}^{\perp}$.

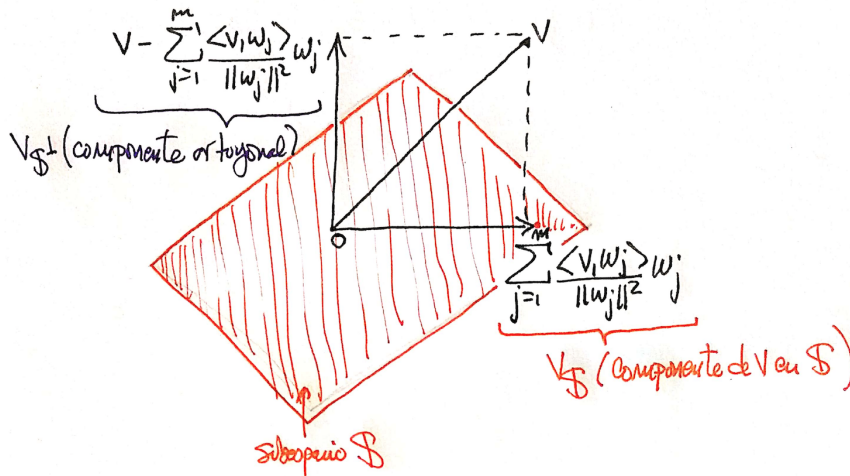


FIGURA 1. Todo vector de \mathbb{V} se descompone de manera única en la forma $v = v_{\mathbb{S}} + v_{\mathbb{S}^{\perp}}$ con $v_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $v_{\mathbb{S}^{\perp}} \in \mathbb{S}^{\perp}$.

□

Nota Bene. Nótese que si $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{V} , tenemos que

$$(3) \quad \langle v, w \rangle = [w]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} [v]^{\mathcal{B}}.$$

Si \mathbb{S} es un subespacio de \mathbb{V} y $\mathcal{B}_{\mathbb{S}} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ es una base ortogonal de \mathbb{S} , podemos usar (3) y (2) para obtener la matriz de la proyección ortogonal de \mathbb{V} sobre \mathbb{S} respecto de la base \mathcal{B} ,

$$(4) \quad [P_{\mathbb{S}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{[w_j]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}}} [w_j]^{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}T} \right) G_{\mathcal{B}}.$$

En efecto, basta observar que las coordenadas en base \mathcal{B} de los términos $\frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$ que aparecen en (2) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \right]^{\mathcal{B}} &= \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} [w_j]^{\mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{[w_j]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}}} [w_j]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} [v]^{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}} \\ &= \left(\frac{1}{[w_j]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}}} [w_j]^{\mathcal{B}} [w_j]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} \right) [v]^{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10 (Continuación). En el contexto del Ejemplo 1.8, hallar la matriz en base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el subespacio \mathbb{S} .

Resolución. Enchufamos la base ortonormal, $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ que construimos anteriormente en la fórmula (4) y nos queda

$$\begin{aligned} [P_{\mathbb{S}}] &= (u_1 u_1^T + u_2 u_2^T) G \\ &= \left(\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 0] + \frac{1}{264} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 8 & \\ & & -11 \end{bmatrix} [3 \quad 8 \quad -11] \right) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & -8 \\ -3 & -8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -9 & -9 \\ -8 & 4 & -8 \\ 5 & 5 & 17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.6. Sistemas ortonormales y desarrollos de Fourier. Sea $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal de vectores en un \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. A cada vector $v \in \mathbb{V}$ le podemos asignar la sucesión de números reales

$$(5) \quad c_j = \langle v, u_j \rangle, \quad j \in \mathbb{N},$$

que se denomina *la sucesión de coeficientes de Fourier del vector v respecto del sistema $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$* , y también le podemos asignar la serie (por ahora formal)

$$(6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle u_j$$

que se denomina *la serie de Fourier del vector v respecto del sistema ortonormal $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$* .

Teorema 1.11. Sea $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal de vectores en un \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, entre todos los vectores $s_n \in \mathbb{U}_n := \text{gen}\{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ el de menor desviación al vector $v \in \mathbb{V}$ es la suma parcial de la serie de Fourier del elemento v

$$\operatorname{argmin}_{s_n \in \mathbb{U}_n} \|v - s_n\| = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j$$

Interpretación geométrica. Geométricamente este resultado se puede interpretar del siguiente modo. El vector

$$v - \sum_{j=1}^n a_j u_j \in \mathbb{U}_n^\perp$$

cuando, y sólo cuando, $a_j = \langle v, u_j \rangle$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.

Nota Bene. Nótese que de la descomposición $\mathbb{V} = \mathbb{U}_n \oplus \mathbb{U}_n^\perp$ y del Teorema de Pitágoras resulta que

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle^2 + \underbrace{\left\| v - \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \right\|^2}_{\geq 0} \geq \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle^2.$$

Como n es arbitrario y el lado izquierdo de la desigualdad no depende de n , se deduce que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle^2$ es convergente y que

$$(7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle^2 \leq \|v\|^2.$$

La desigualdad (7) se llama *desigualdad de Bessel*. Geométricamente significa que la suma de los cuadrados de las proyecciones de un vector v sobre direcciones mutuamente ortogonales no supera el cuadrado de la longitud del propio vector v .

Definición 1.12. Un sistema ortonormal $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ se llama cerrado, cuando para cada $v \in \mathbb{V}$ se cumple la igualdad

$$(8) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle^2 = \|v\|^2.$$

llamada igualdad de Parseval.

Nota Bene. De la igualdad

$$\left\| v - \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle^2$$

se deduce que el sistema ortonormal $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ es cerrado si, y sólo si, para cada $v \in \mathbb{V}$ las sumas parciales de la serie de Fourier $\sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle u_j$ convergen a v .

1.7. Desarrollos de Fourier de funciones continuas o cuadrado integrales.

Sea $C([-\pi, \pi])$ el espacio euclídeo de las funciones continuas de $[-\pi, \pi]$ en \mathbb{R} con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt,$$

cuya norma inducida es

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt \right)^{1/2}.$$

No es difícil verificar que el conjunto de funciones trigonométricas

$$\{1, \cos(t), \cos(2t), \cos(3t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \sin(3t), \dots\}$$

es un sistema ortogonal de funciones. La verificación es más o menos directa si se recuerdan las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

De las mismas se deduce que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)), \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha = mt$ y $\beta = nt$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y utilizando que $\int_{-\pi}^{\pi} 1dt = 2\pi$ se puede ver que

$$\begin{aligned} \langle \cos(mt), \cos(nt) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)t) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)t)dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)t)dt \\ &= \begin{cases} \pi & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \\ &= \pi\delta_{mn}. \end{aligned}$$

Del mismo modo se comprueba que

$$\langle \sin(mt), \sin(nt) \rangle = \pi\delta_{mn},$$

y que

$$\langle \cos(mt), \sin(nt) \rangle = 0.$$

Como $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ vale que $\|\cos(mt)\| = \|\sin(mt)\| = \sqrt{\pi}$, tenemos que el conjunto de funciones

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

es un sistema ortonormal en el espacio euclídeo $(C([-π, π]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

La serie de Fourier de cualquier función $f \in C[-\pi, \pi]$ es

$$(9) \quad S_f(t) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\cos(mt)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\text{sen}(mt)}{\sqrt{\pi}},$$

donde los coeficientes de Fourier están dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \\ a_m &= \left\langle f, \frac{\cos(mt)}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt)dt, \quad \text{para } m \in \mathbb{N}, \\ b_m &= \left\langle f, \frac{\text{sen}(mt)}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(mt)dt, \quad \text{para } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Teorema 1.13. *Sea $f \in C([-π, π])$ y sea S_f la serie de Fourier de f definida en (9). Vale que*

1. $S_f(t) = f(t)$ para todo $t \in (-\pi, \pi)$,
2. $S_f(-\pi) = S_f(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$.

Demostración. Se demuestra en la asignatura Análisis Matemático III y excede los límites de este curso. \square

Nota Bene. Modificando un poco la noción de igualdad de funciones podemos generalizar los resultados anteriores a las funciones cuadrado integrables sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Ejemplo 1.14 (Desarrollo de Fourier de la onda cuadrada). La *función onda cuadrada* se define por

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{cuando } -\pi < t < 0, \\ 1 & \text{cuando } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

y se extiende por periodicidad a todo $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mediante $f(t + 2k\pi) := f(t)$ para todo $t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ y todo $k \in \mathbb{Z}$. El valor de f en $t = 0$ es irrelevante (incluso no es necesario que $f(0)$ este definido).

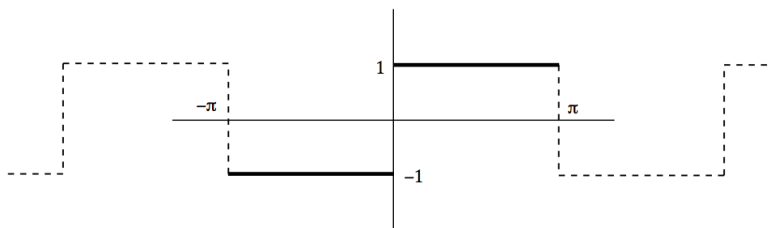


FIGURA 2. Gráfico de la función onda cuadrada.

Para encontrar la serie de Fourier de f , primero hay que calcular los coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} dt = 0, \\
 a_m &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^0 \cos(mt) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos(mt) dt \\
 &= 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, \\
 b_m &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(mt) dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(mt) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(mt) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left. \frac{\cos(mt)}{m} \right|_{-\pi}^0 - \left. \frac{\cos(mt)}{m} \right|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{m\sqrt{\pi}} (1 - \cos(-m\pi) - [\cos(m\pi) - 1]) \\
 &= \frac{2}{m\sqrt{\pi}} (1 - \cos(m\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \text{ es par,} \\ \frac{4}{m\sqrt{\pi}} & \text{cuando } m \text{ es impar.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tenemos así que la serie de Fourier de $f(t)$ es

$$\begin{aligned}
 S_f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}((2n-1)t) \\
 &= \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen}(5t) + \dots
 \end{aligned}$$

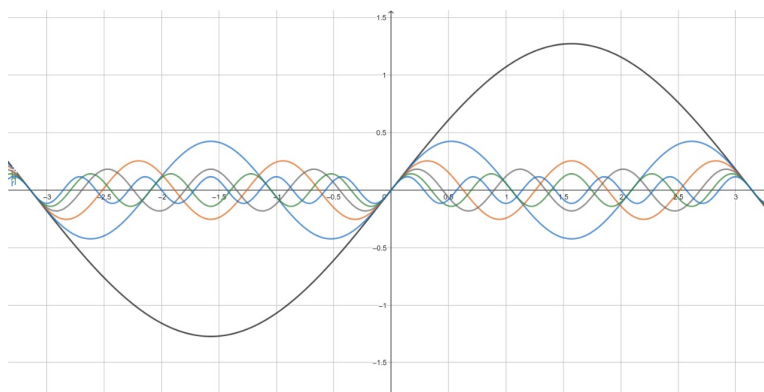


FIGURA 3. Gráfico de las primeras seis componentes no nulas de la serie de Fourier de la onda cuadrada.

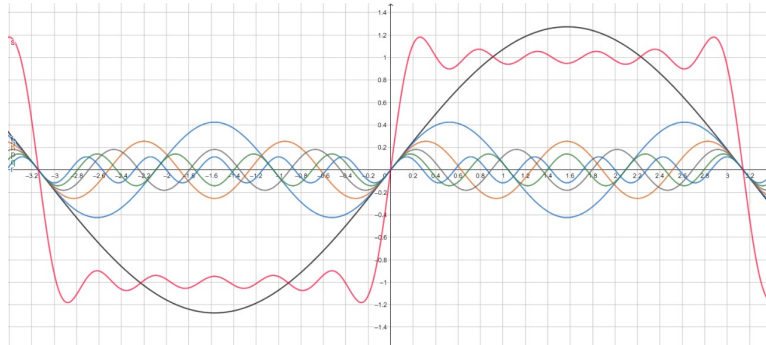


FIGURA 4. En color rojo se observa el gráfico de la superposición de las primeras seis componentes no nulas de la serie de Fourier de la onda cuadrada.

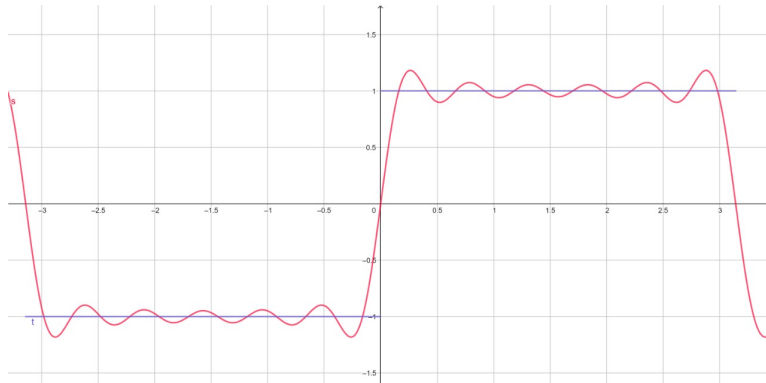


FIGURA 5. Comparación gráfica entre la suma parcial de Fourier $\sum_{n=1}^6 \frac{4}{(2n-1)\pi} \text{sen}((2n-1)t) = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t) + \frac{4}{7\pi} \text{sen}(7t) + \frac{4}{9\pi} \text{sen}(9t) + \frac{4}{11\pi} \text{sen}(11t)$ y la onda cuadrada: f