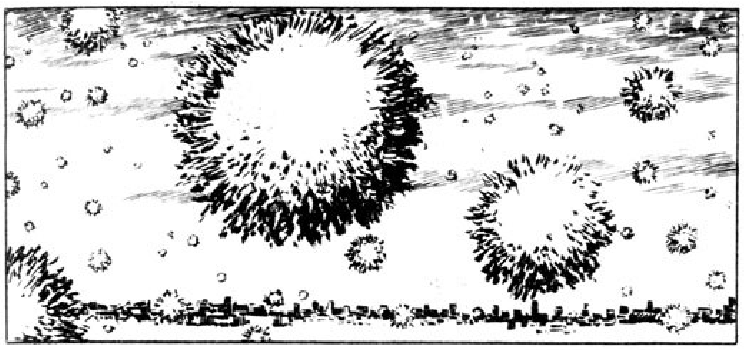
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 1 de noviembre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Teorema de representación de Riesz

Teorema 1.1 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio euclídeo de dimensión finita y sea* $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$*. Entonces existe un único vector* $v \in \mathbb{V}$ *tal que* $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ *para todo* $x \in \mathbb{V}$*.*

Demostración. Suponemos que $\phi \neq 0$ porque el caso $\phi = 0$ es inmediato, $v = 0$. Puesto que $\mathbb{V}$ es de dimensión finita vale que

$$\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(\phi) \oplus \mathrm{Nu}(\phi)^{\perp}.$$

Como la funcional lineal $\phi \neq 0$, su imagen tiene dimensión 1. De acuerdo con el teorema de la dimensión, de aquí se deduce que $\dim(\mathrm{Nu}(\phi)^{\perp}) = 1$. Podemos tomar un vector cualquiera

$$w \in \mathrm{Nu}(\phi)^{\perp} \setminus \{0\}$$

y descomponer cada vector $x \in \mathbb{V}$ de manera única en la forma

$$x = \underbrace{\frac{\langle x, w\rangle}{\|w\|^2} w}_{\in \mathrm{Nu}(\phi)^{\perp}} + \underbrace{\left(x - \frac{\langle x, w\rangle}{\|w\|^2} w\right)}_{\in \mathrm{Nu}(\phi)}. \tag{1}$$

Aplicando ϕ en ambos lados de la descomposición (1) y utilizando que ϕ es una transformación lineal tenemos que

$$\phi(x) = \phi\left(\frac{\langle x, w\rangle}{\|w\|^2} w\right) = \frac{\langle x, w\rangle}{\|w\|^2}\phi(w) = \frac{\left\langle x, \overline{\phi(w)} w\right\rangle}{\|w\|^2} = \left\langle x, \overline{\phi(u)} u\right\rangle,$$

donde $u = \frac{w}{\|w\|}$ es un vector unitario perteneciente al complemento ortogonal del núcleo de ϕ. Poniendo $v = \overline{\phi(u)} u$ se obtiene que

$$\phi(x) = \langle x, v\rangle$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

La unicidad de v se deduce de la siguiente manera. Si $\tilde{v}$ es un vector de $\mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x, \tilde{v}\rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$0 = \langle x, v - \tilde{v}\rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{V}$$

En particular, poniendo $x = v - \tilde{v}$ tenemos $0 = \langle v - \tilde{v}, v - \tilde{v}\rangle$ y esta igualdad equivale a esta otra: $v - \tilde{v} = 0$. En consecuencia, $\tilde{v} = v$. □

Nota Bene. Nótese que si $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ el cálculo del vector representante de ϕ se puede realizar de la siguiente manera: como $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$, podemos escribir $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\phi(v_i) = \langle v_i, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \langle v_i, v_j\rangle, \quad \forall\, i \in \mathbb{I}_n,$$

cuya representación matricial tiene la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{bmatrix}}_{\overline{[v]^{\mathcal{B}}}} = \begin{bmatrix} \phi(v_1) \\ \phi(v_2) \\ \vdots \\ \phi(v_n) \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\overline{[v]^{\mathcal{B}}} = G_{\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} \phi(v_1) & \phi(v_2) & \cdots & \phi(v_n) \end{bmatrix}^T. \tag{2}$$

Ejemplo 1.2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico consideramos la funcional $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

El vector $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es tal que $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.3. En $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{G} x,$$

consideramos la funcional $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Queremos hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Resolución. Para hallar v utilizamos directamente fórmula (2)

$$v = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi(e_1) \\ \phi(e_2) \\ \phi(e_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}^{\perp} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 9 & 8 & -5 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Ejemplo 1.4. En $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\, dx,$$

consideramos la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(p) = p'(0).$$

Queremos hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\phi(p) = \langle p, q\rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Resolución. Consideramos la base canónica $\{1, x, x^2\}$, escribimos $q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\phi(x^i) = \left\langle x^i, q\right\rangle = a_0 \left\langle x^i, 1\right\rangle + a_1 \left\langle x^i, x\right\rangle + a_2 \left\langle x^i, x^2\right\rangle, \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Como $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = 1$, $\phi(x^2) = 0$ y $\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que el sistema anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Su solución es

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 192 \\ -180 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$q = -36 + 192x - 180x^2.$$

2. Algoritmo de Gram-Schmidt

Teorema 2.1 (Ortogonalización de Gram-Schmidt)**.** *Sea* $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio euclídeo de dimensión* n *y sea* $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$*. Entonces, el conjunto* $\mathcal{G} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ *definido por*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &\vdots \\ w_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i, \end{aligned}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{V}$*. Además, la base* $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ *definida por* $u_j = \frac{1}{\|w_j\|} w_j$*, es una base ortonormal de* $\mathbb{V}$*.*

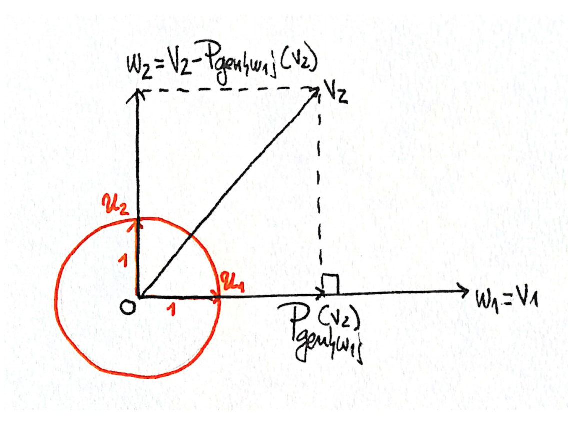


Figura 1. Primeros pasos del algoritmo de Gram-Schmidt

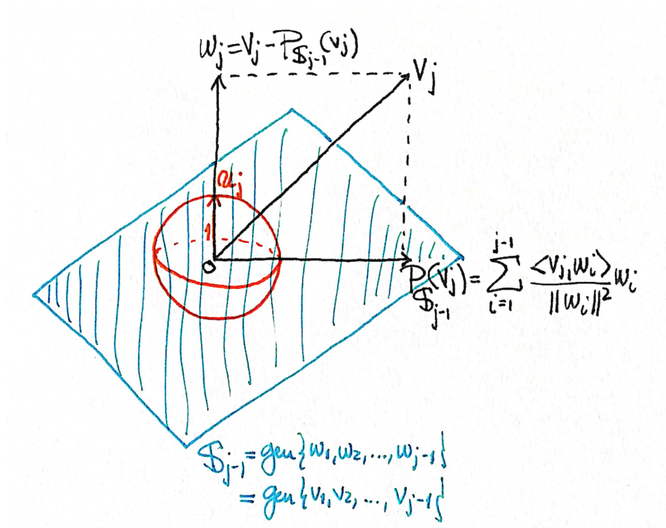


FIGURA 2. Paso j del algoritmo de Gram-Schmidt: primero se proyecta el vector v_j sobre el subespacio $\mathbb{S}_{j-1} = \text{gen}\{w_1, \ldots, w_{j-1}\}$ y luego se le suprime dicha componente $w_j := v_j - P_{\mathbb{S}_{j-1}}(v_j) = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$. En naranja, el vector $u_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$.

Demostración. Por construcción, tenemos que

$$v_1 = w_1 \ \text{ y } \ v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i + w_j \ \text{ para cada } j \in \{2, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Esto significa que cada v_j es una combinación de los elementos de $\mathcal{G}$, motivo por el cual el conjunto $\mathcal{G}$ genera $\mathbb{V}$ y como su cardinal es la $\dim(\mathbb{V})$, tenemos que $\mathcal{G}$ es una base de $\mathbb{V}$. De aquí se concluye que $\mathcal{U}$ también es una base de $\mathbb{V}$. No hay problema con los denominadores $\|w_j\|$ porque los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son linealmente independientes, y en consecuencia ninguno puede ser el 0.

Para demostrar que $\mathcal{G}$ es un sistema ortogonal utilizaremos el principio de inducción aplicado a los conjuntos $\{w_j, j \in \mathbb{I}_m\}$. Para $m = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que el conjunto $\{w_j, j \in \mathbb{I}_{m-1}\}$, con $m > 1$, es ortogonal y comprobemos que el conjunto $\{w_j, j \in \mathbb{I}_m\}$ también es ortogonal.

Para $k < m$

$$\begin{aligned}\langle w_m, w_k\rangle &= \langle v_m, w_k\rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \langle w_i, w_k\rangle \\ &= \langle v_m, w_k\rangle - \frac{\langle v_m, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} \langle w_k, w_k\rangle = \langle v_m, w_k\rangle - \langle v_m, w_k\rangle = 0.\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_m\}$ es un conjunto ortogonal. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es una base ortogonal. Inmediatamente se deduce que $\mathcal{U}$ es una base ortonormal. $\square$

Nota Bene. Obsérvese que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{G}$ obtenida mediante el algoritmo de Gram-Schmidt aplicado a la base $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} & \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle v_n, w_3\rangle}{\|w_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Esta estructura triangular superior (con unos en la diagonal) de la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{G}$ significa que para cada $m \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\text{gen}\{v_j : j \in \mathbb{I}_m\} = \text{gen}\{w_j : j \in \mathbb{I}_m\}.$$

Esto es así, porque la matriz inversa tiene la misma estructura.

Ejemplo 2.2. En $\mathbb{R}^4$, con el producto interno canónico, consideramos el siguiente conjunto de tres vectores linealmente independientes

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y le aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal

$j = 1$:

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 2, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$j = 2$:

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = v_2 - w_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = 4, \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = v_3 - 2w_1 - \frac{1}{2} w_2 \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|w_3\|^2 = 3, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

es el sistema ortonormal requerido.

Poniendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{G} = \{w_1, w_2, w_3\}$ tenemos que

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Nota Bene. El resultado anterior también muestra que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz de rango n, existen una matriz $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y una matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que

1. Las columnas de Q son una base ortonormal de $\operatorname{col}(A)$
2. La matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos.
3. $A = QR$

Las columnas de A, $\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$ son una base del espacio $\operatorname{col}(A)$. Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt, respecto del producto interno canónico, se obtiene primero una base ortogonal de $\operatorname{col}(A)$, $\mathcal{G} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, y luego una base ortonormal de $\operatorname{col}(A)$, $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tales que para todo $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\begin{aligned} A_{*j} &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle A_{*j}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i + w_j \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \langle A_{*j}, u_i\rangle\, u_i + \|w_j\| u_j. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$A = \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|w_1\| & \langle A_{*2}, u_1\rangle & \langle A_{*3}, u_1\rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_1\rangle\\ 0 & \|w_2\| & \langle A_{*3}, u_2\rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_2\rangle\\ 0 & 0 & \|w_3\| & \cdots & \langle A_{*n}, u_3\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|w_n\|\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.3 (Continuación)**.**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{R}.$$

Ejemplo 2.4. En el espacio euclídeo $C([-1,1],\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

consideramos $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$, que constituyen un conjunto linealmente independiente, y le aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal.

$j = 1$:

$$w_1 = v_1 = 1, \quad \|w_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2 dx = 2, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$j = 2$:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\|1\|^2} 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot 1 dx}{2} 1 = x$$

$$\|w_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = x^2 - \frac{\left\langle x^2, 1\right\rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\left\langle x^2, x\right\rangle}{\|x\|^2} x \\ &= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}{2} 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\, dx}{\frac{2}{3}} x = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\|w_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}, \quad u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Por lo tanto,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

es el sistema ortonormal requerido. □

3. Producto vectorial

En todo lo que sigue $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ será $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión $n \geq 3$ y $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ será una base ortonormal fija.

3.1. Determinantes.

Definición 3.1. *Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. El determinante de $v_1, v_2, \dots, v_n$ con respecto a la base $\mathcal{E}$ se define por*

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) := \det\left[[v_1]^{\mathcal{E}} \quad [v_2]^{\mathcal{E}} \quad \dots \quad [v_n]^{\mathcal{E}}\right]. \tag{4}$$

3.2. Orientación de una base ortonormal con respecto a otra.

Sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$. En lo que sigue veremos cuánto vale el determinante de $u_1, u_2, \dots, u_n$ con respecto a la base $\mathcal{E}$. Por definición tenemos que

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det\left[[u_1]^{\mathcal{E}} \quad [u_2]^{\mathcal{E}} \quad \dots \quad [u_n]^{\mathcal{E}}\right] = \det(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}),$$

donde $M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{U}$ en la base $\mathcal{E}$. Como las dos bases son ortonormales y $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sabemos que $\left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right)^T$ y de aquí se puede inferir que

$$1 = \det\left(\left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right)^T M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right) = \det\left(\left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right)^T\right) \det\left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right) = \left(\det\left(M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}\right)\right)^2.$$

Tenemos así que

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \{-1, 1\}. \tag{5}$$

Cuando $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$ se dice que *la base $\mathcal{U}$ es orientada positivamente con respecto a $\mathcal{E}$*. En el otro caso, se dice que *la base $\mathcal{U}$ es orientada negativamente con respecto a $\mathcal{E}$*

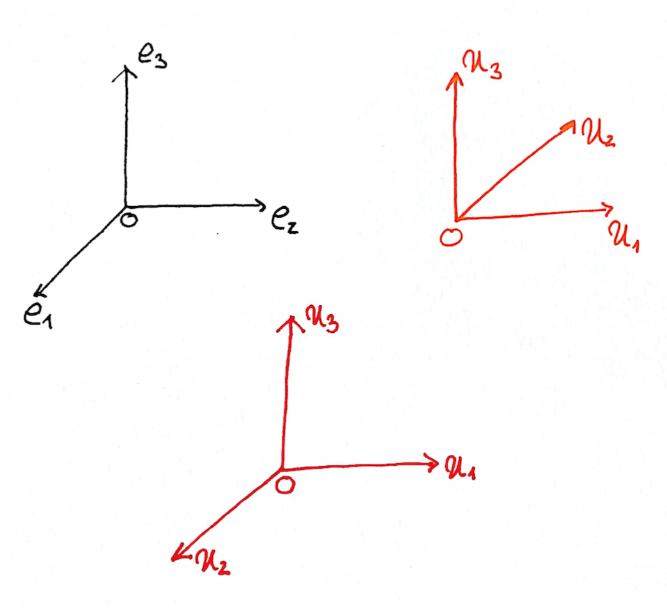


FIGURA 3. Las dos orientaciones con respecto a una base ortonormal $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ en un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3. En naranja una base ortonormal orientada positivamente; en rojo una base ortonormal orientada negativamente.

3.3. El producto vectorial.

Fijados $n-1$ vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{V}$, se puede ver, más o menos inmediatamente, que la función $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\phi(x) := \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$$

es una funcional lineal de $\mathbb{V}$. De acuerdo con el Teorema de Riesz, existe un único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Este vector se denomina *el producto vectorial de* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ y se lo designa mediante $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$.

3.4. Algunas propiedades del producto vectorial.

1. El producto vectorial $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ está caracterizado por ser el único vector de $\mathbb{V}$ tal que

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, x) = \langle x, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{V}.$$

2. Al examinar la demostración del Teorema de Riesz, que garantiza la existencia y unicidad de $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$, se puede advertir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in \mathrm{Nu}(\phi)^{\perp}.$$

Recordando las propiedades del determinante se puede ver que para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vale que

$$\phi(v_j) = \det\left(\begin{bmatrix} [v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \ldots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}} & [v_j]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Esto es así porque las columnas j y n de la matriz

$$\begin{bmatrix} [v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \ldots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}} & [v_j]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$$

son iguales. Esto significa que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ está contenido en el núcleo de ϕ y como $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in \mathrm{Nu}(\phi)^{\perp}$, se puede concluir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \perp v_j, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

3. Cuando los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ son linealmente dependientes la funcional lineal

$$\phi(x) = \det(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, x)$$

es nula porque la matriz $\begin{bmatrix} [v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \ldots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}} & [x]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$ tiene columnas linealmente dependientes. Como consecuencia de la unicidad de la representación se obtiene que $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0$.

Recíprocamente, si el producto vectorial $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0$, la funcional lineal ϕ es nula.

Si elegimos un vector cualquiera $x_0 \notin \mathrm{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, el resultado $\phi(x_0) = 0$, significa que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ son linealmente dependientes porque en caso contrario la matriz $\begin{bmatrix} [v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \ldots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}} & [x_0]^{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$ tendría todas las columnas linealmente independientes y su determinante sería no nulo.

Se concluye así que $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ son linealmente dependientes si, y sólo si, $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0$.

4. Utilizando el desarrollo del vector $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ respecto de la base ortonormal $\mathcal{E}$:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i,$$

y observando que

$$\phi(e_i) = \det\left(\begin{bmatrix}[v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \dots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}} & [e_i]^{\mathcal{E}}\end{bmatrix}\right) = (-1)^{n+i}\Delta_i$$

donde Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene de eliminar la i-esima fila de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n-1}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix}[v_1]^{\mathcal{E}} & [v_2]^{\mathcal{E}} & \dots & [v_{n-1}]^{\mathcal{E}}\end{bmatrix},$$

se puede concluir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\Delta_i e_i.$$

5. Como para cada $x \in \mathbb{V}$ vale que

$$\begin{aligned}\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) &= \langle x, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\rangle \\ &= \|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\| \, \langle x, u\rangle\end{aligned}$$

donde $u = \frac{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|}$, se puede ver que

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u) = \|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|.$$

De aquí se puede deducir que si $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ es un sistema ortonormal, entonces $\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\| = 1$ y, en consecuencia, también se puede deducir que la base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$ es orientada positivamente con respecto a $\mathcal{E}$.

3.5. El producto vectorial y los hiperplanos.

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ un conjunto linealmente independiente y sea $\mathbb{S}$ el subespacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Como $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{S}^{\perp} \setminus \{0\}$ tenemos que para cada $v \in \mathbb{V}$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{S}^{\perp}}(v) = \frac{\langle v, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\rangle}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2}(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}),$$

y en consecuencia,

$$d(v, \mathbb{S}) = \|P_{\mathbb{S}^{\perp}}(v)\| = \frac{|\langle v, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\rangle|}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|}.$$

De la relación $\mathbb{S}^{\perp} = \text{gen}\{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$ se deduce inmediatamente que

$$\mathbb{S} = \{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}^{\perp}.$$

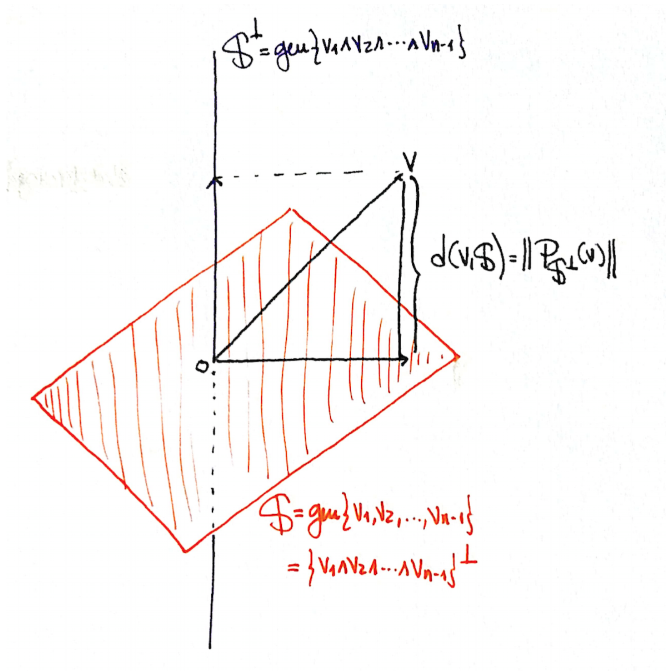


Figura 4. Distancia de un punto a un hiperplano.

3.6. Fórmula de Lagrange y área del paralelogramo.

En lo que sigue la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ será $n = 3$. Escribiendo $v_1 = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ y $v_2 = \sum_{i=1}^3 y_i e_i$, desarrollando cuadrados y reagrupando términos, se puede ver que

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i y_i x_j y_j,$$

$$\begin{aligned} \|v_1 \wedge v_2\|^2 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_3)^2 \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{I}_3 \times \mathbb{I}_3: \\ i \neq j}} x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i y_i x_j y_j, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 + \|v_1 \wedge v_2\|^2 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}_3 \times \mathbb{I}_3} x_i^2 y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 y_j^2 \right) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2.$$

Hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 3.2 (Fórmula de Lagrange)**.** *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ vale que*

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 + \|v_1 \wedge v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2. \tag{6}$$

Nota Bene. Geométricamente, la fórmula de Lagrange significa que cuando v_1, v_2 son linealmente independientes, la norma del producto vectorial $v_1 \wedge v_2$ es el área del paralelogramo generado por v_1, v_2. Esto es así porque

$$\begin{aligned}\|v_1 \wedge v_2\|^2 &= \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2 \\ &= \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2\|v_2\|^2\cos^2\theta \\ &= \|v_1\|^2\|v_2\|^2 \operatorname{sen}^2\theta,\end{aligned}$$

donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo formado por los vectores v_1 y v_2, y por lo tanto,

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\|\|v_2\| \operatorname{sen}\theta.$$

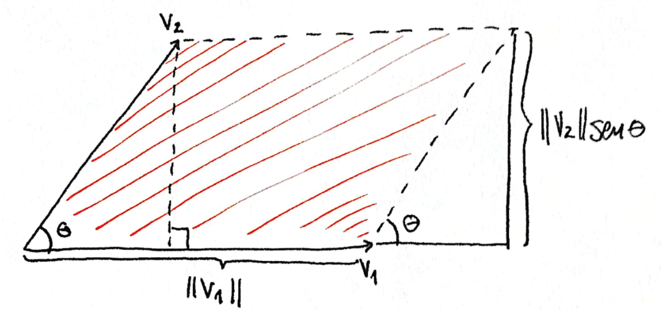


Figura 5. El área del paralelogramo generado por v_1 y v_2 es la norma del producto vectorial de dichos vectores.