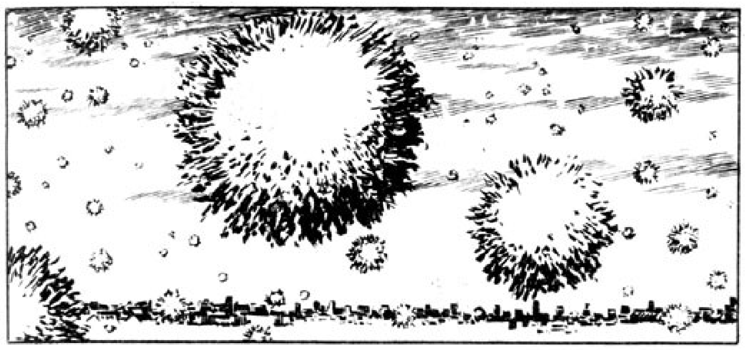
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021

Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 15 de noviembre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo",
nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Introducción

1.1. Semejanza.

Definición 1.1. *Decimos que* dos matrices A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son semejantes *si existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $P^{-1}AP = B$. El producto $P^{-1}AP$ se denomina* transformación de semejanza de A.

Problema. Dada una matriz cuadrada A, reducirla a la forma más sencilla posible mediante una transformación de semejanza.

1.2. Matrices diagonales.

Definición 1.2. *Decimos que* una matriz $\Lambda \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonal *si $\Lambda_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Si $\Lambda \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonal escribimos*

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

para indicar que $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ para todo $i \in \{1, \dots n\}$. En este caso también escribimos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

1.3. Matrices diagonalizables.

Definición 1.3. *Decimos que* una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable *si A es semejante a una matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Nota Bene. Nótese que por definición $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y solamente si existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $P^{-1}AP = \Lambda$, con $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Decir que P es inversible significa que las columnas de P constituyen una base de $\mathbb{K}^n$. Decir que $P^{-1}AP = \Lambda$ es lo mismo que decir que

$$AP = P\Lambda. \tag{1}$$

Si $P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, la identidad (1) se puede escribir de la siguiente manera

$$A \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} Av_1 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Esto significa que A es diagonalizable si, y solo si, existe una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ y n escalares, no necesariamente distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$Av_j = \lambda_j v_j \ \text{ para todo } \ j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Las igualdades (3) caracterizan unívocamente a la matriz A porque la acción de A sobre los vectores de $\mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$, es una transformación lineal y toda transformación está unívocamente determinada por sus valores en una base.

Utilizando que cada vector $x \in \mathbb{K}^n$ se descompone de manera única como una combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$ y escribiendo

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n,$$

con $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tenemos

$$Ax = c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_n \lambda_n v_n. \tag{4}$$

2. Autovalores y autovectores

Definición 2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$* es un autovalor de *A, si existe un vector no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un* autovector de A correspondiente al autovalor λ*. El conjunto de todos los autovalores de A se llama* el espectro de A*, y lo designaremos mediante $\sigma(A)$.*

Nota Bene. Nótese que

- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ es singular $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\mathrm{nul}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ es el conjunto de todos los autovectores de A correspondientes al autovalor λ.

Definición 2.2. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \sigma(A)$. El subespacio* $\mathrm{nul}(A - \lambda I)$ *se denomina* el autoespacio de A correspondiente al autovalor λ*; su dimensión se denomina* la multiplicidad geométrica de λ *y la designaremos mediante $\mu(\lambda)$:*

$$\mu(\lambda) = \dim\left(\mathrm{nul}(A - \lambda I)\right).$$

Definición 2.3. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El polinomio $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ se llama* el polinomio característico de A*.*

Nota Bene. Nótese que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$ y como $\chi_A \in \mathbb{K}_n[x]$, tenemos que $|\sigma(A)| \leq n$.

2.1. Independencia lineal.

Lema 2.4 (Independencia lineal)**.** *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es un conjunto de autovectores de A tal que $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_m$, entonces $\{v_j : j \in \mathbb{I}_m\}$ es linealmente independiente. En otras palabras, todo conjunto formado por autovectores de A correspondientes a autovalores de A, distintos dos a dos, es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Por el absurdo. Suponemos que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente dependiente. Entonces, existe $k \in \mathbb{I}_m$ minimal tal que $v_k \in \mathrm{gen}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Por un lado, la minimalidad de k garantiza que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es linealmente independiente. Por otro lado, existen $a_1, \ldots, a_{k-1}$ no todos nulos tales que $v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}$. Como v_k es un autovector que corresponde al autovalor λ_k podemos escribir

$$A\left(a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}\right) = \lambda_k \left(a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}\right). \tag{5}$$

Como para $j \in \mathbb{I}_{k-1}$, v_j es un autovector correspondiente a λ_j el lado izquierdo de la igualdad (5) es igual a $a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_k$, mientras que su lado derecho es igual a $a_1 \lambda_k v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_k v_{k-1}$. En consecuencia,

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0.$$

Lo que contradice la independencia lineal del conjunto $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Esto es así porque existe un $j \in \mathbb{I}_{k-1}$ tal que $a_j \neq 0$ y por hipótesis $\lambda_j \neq \lambda_k$. □

Nota Bene. Nótese que decir que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable es lo mismo que decir que existe una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A.

Corolario 2.5. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $|\sigma(A)| = n$, entonces A es diagonalizable.*

Demostración. Para cada $\lambda \in \sigma(A)$, elegimos v_λ un autovector correspondiente a λ. De acuerdo con el Lema 2.4, el conjunto $\{v_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ es linealmente independiente y como contiene n elementos es una base de $\mathbb{K}^n$. □

Corolario 2.6. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Son equivalentes*

1. *A es diagonalizable.*
2. *$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{j=1}^m \mathrm{nul}(A - \lambda_j I)$.*
3. *$n = \sum_{j=1}^m \mu(\lambda_j)$.*

Demostración. Ejercicio. □

2.2. Polinomios y matrices.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $p \in \mathbb{K}_m[x]$, entonces $p(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ se puede evaluar en A de la siguiente manera

$$p(A) = \sum_{k=0}^m b_k A^k,$$

donde, por definición, $A^0 = I$.

Nota Bene. Nótese que si $p \in \mathbb{K}_m[x]$ se factoriza en la forma $p = p_1 p_2$, entonces $p(A) = p_1(A)p_2(A)$. Esto es así porque las potencias de A conmutan entre sí.

Lema 2.7. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si $p \in \mathbb{C}_m[x]$, entonces*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Demostración. Primero vamos a demostrar que $\{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(p(A))$. Si $\lambda \in \sigma(A)$, existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. De aquí se deduce que $A^k v = \lambda^k v$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Si $p(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, escribiendo

$$p(A)v = \left(\sum_{k=0}^m b_k A^k\right) v = \sum_{k=0}^m b_k A^k v = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k v = \left(\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k\right) v = p(\lambda)v,$$

se concluye que $p(\lambda)$ es un autovalor de $p(A)$ y que v es un autovector de $p(A)$ correspondiente al autovalor $p(\lambda)$.

Ahora vamos a demostrar que $\sigma(p(A)) \subseteq \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Para eso vamos a demostrar que demostrar que si ξ es un autovalor de $p(A)$, entonces existe λ de A tal que $p(\lambda) = \xi$. Si $p(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, con $b_m \neq 0$, el Teorema fundamental del Álgebra garantiza la existencia de m números complejos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que

$$p(x) - \xi = b_m \prod_{j=1}^m (x - \lambda_j).$$

Evaluando en A tenemos que

$$p(A) - \xi I = b_m \prod_{j=1}^{m} (A - \lambda_j I).$$

Utilizando las propiedades del determinante tenemos

$$\det\left(p(A) - \xi I\right) = b_m^m \prod_{j=1}^{m} \det(A - \lambda_j I).$$

Como $b_m \neq 0$. La anulación del determinante del lado izquierdo de la igualdad es equivalente a la anulación de alguno de los determinantes que se multiplican del lado derecho de la misma. Esto significa que alguno de los λ_j es autovalor de A, y como λ_j es raíz del polinomio $p(x) - \xi$, se concluye que $\xi = p(\lambda_j)$. $\square$

Nota Bene. Nótese que si $\lambda \in \sigma(A)$ y $p \in \mathbb{K}_m[x]$, entonces

$$\operatorname{nul}(A - \lambda I) \subseteq \operatorname{nul}\left(p(A) - p(\lambda) I\right).$$

Nota Bene. Nótese que $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es inversible, si y solo si, $0 \notin \sigma(A)$. De aquí se puede deducir que si A es inversible, entonces

$$\sigma\left(A^{-1}\right) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

2.3. Sobre el polinomio característico.

Lema 2.8. *El polinomio característico es invariante por transformaciones de semejanza. En otras palabras, si A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son semejantes, entonces sus polinomios característicos son idénticos.*

Demostración. Como A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son semejantes, existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $P^{-1}AP = B$. Escribiendo $P^{-1}(A - xI)P = P^{-1}AP - xI = B - xI$ y utilizando que $\det\left(P^{-1}\right)\det(P) = 1$, obtenemos

$$\chi_B(x) = \det(B - xI) = \det\left(P^{-1}(A - xI)P\right) = \det(P^{-1})\chi_A(x)\det(P) = \chi_A(x).$$

$\square$

Corolario 2.9. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Si A es diagonalizable, entonces*

$$\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^{m} (x - \lambda_j)^{\mu(\lambda_j)}. \tag{6}$$

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, m$ consideramos una base $\mathcal{B}_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,\mu(\lambda_i)}\}$ del autoespacio de A correspondiente al autovalor λ_i. Como A es diagonalizable, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$ es una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de $\mathbb{K}^n$. Si para cada $i = 1, \dots, m$, definimos la matriz $X_i \in \mathbb{K}^{n \times \mu(\lambda_i)}$ mediante

$$X_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} & \cdots & v_{i,\mu(\lambda_i)} \end{bmatrix},$$

y consideramos la matriz $P = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_m \end{bmatrix}$, tenemos que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mu(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m I_{\mu(\lambda_m)} \end{bmatrix},$$

donde $I_{\mu(\lambda_i)}$ es la matriz identidad de $\mathbb{K}^{\mu(\lambda_1)\times\mu(\lambda_i)}$.

Utilizando el Lema 2.8 tenemos

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \prod_{i=1}^{m} \det\left(\lambda_i I_{\mu(\lambda_i)} - x I_{\mu(\lambda_i)}\right) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - x)^{\mu(\lambda_i)} \det\left(I_{\mu(\lambda_i)}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{m} (-1)^{\mu(\lambda_i)} (x-\lambda_i)^{\mu(\lambda_i)} = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (x-\lambda_i)^{\mu(\lambda_i)}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.10. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Si A es diagonalizable, entonces*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{\mu(\lambda_i)} \quad y \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\lambda_i)\lambda_i.$$

Demostración. Ejercicio. □