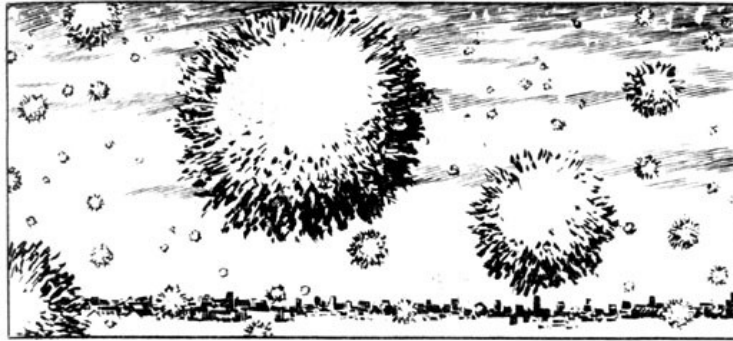

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 17 DE NOVIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Teorema espectral para matrices diagonalizables	2
1.1. Recordatorio: análisis de la estructura geométrica de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	2
1.2. Teorema espectral para matrices diagonalizables	3
2. Problemas dinámicos	6
2.1. Potencias de matrices diagonalizables	7

1. TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRICES DIAGONALIZABLES

1.1. Recordatorio: análisis de la estructura geométrica de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Paso 1: Calcular el polinomio característico de A , $\chi_A(x) = \det(A - xI)$.

Paso 2: Hallar el espectro de A , $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.

Paso 3: Para cada $\lambda \in \sigma(A)$, hallar el autoespacio de A que corresponde al autovalor λ , $\mathbb{S}_\lambda = \text{nul}(A - \lambda I)$, y determinar la multiplicidad geométrica del autovalor λ , $\mu(\lambda) = \dim(\mathbb{S}_\lambda)$

Paso 4: Dos alternativas:

a) $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mu(\lambda) < n$. En este caso se concluye que A no es diagonalizable.

b) $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mu(\lambda) = n$. En este caso se concluye que A es diagonalizable.

Nota Bene. Nótese que si $\lambda \in \sigma(A)$ y $X_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times \mu(\lambda)}$ es una matriz cuyas columnas constituyen una base del autoespacio de A que corresponde al autovalor λ , entonces

$$AX_\lambda = X_\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_{\lambda I_{\mu(\lambda)}},$$

donde $I_{\mu(\lambda)}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{\mu(\lambda) \times \mu(\lambda)}$.

En efecto, si $\mathcal{B}_\lambda = \{x_{\lambda,1}, \dots, x_{\lambda,\mu(\lambda)}\}$ es una base de $\text{nul}(A - \lambda I)$, tenemos

$$\begin{aligned} A \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\lambda,1} & \cdots & x_{\lambda,\mu(\lambda)} \end{bmatrix}}_{X_\lambda} &= \begin{bmatrix} Ax_{\lambda,1} & \cdots & Ax_{\lambda,\mu(\lambda)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda x_{\lambda,1} & \cdots & \lambda x_{\lambda,\mu(\lambda)} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\lambda,1} & \cdots & x_{\lambda,\mu(\lambda)} \end{bmatrix}}_{X_\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{\mu(\lambda) \times \mu(\lambda)}}. \end{aligned}$$

Ilustración. En lo que sigue consideraremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, analizaremos su estructura geométrica, y mostraremos que la misma se resume en una descomposición de A determinada por una suma de proyecciones oblicuas sobre los autoespacios de A multiplicadas por sus respectivos autovalores.

Ejemplo 1.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz definida por

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. El polinomio característico de A es

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)^2.$$

2. El espectro de A es $\sigma(A) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

3. Autoespacios de A correspondientes a los autovalores $\frac{1}{2}, 1$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\frac{1}{2}} &= \text{nul} \left(A - \frac{1}{2}I \right) = \text{nul} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{gen} \left\{ [1 \ 1 \ 1]^T \right\}, \\ \mathbb{S}_1 &= \text{nul} (A - I) = \text{nul} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{gen} \left\{ [1 \ 0 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 0]^T \right\},\end{aligned}$$

y multiplicidades geométricas de cada uno $\mu(\frac{1}{2}) = 1$ y $\mu(1) = 2$.

4. Conclusión. A es diagonalizable y es semejante a una matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\frac{1}{2}, 1, 1)$. Más precisamente, $A = P\Lambda P^{-1}$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escribimos $A = P\Lambda P^{-1}$ y reagrupamos términos agrupándolos por su correspondiente autovalor

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \ 1 \ 1] + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{G_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{G_2} \\ &= \frac{1}{2}G_1 + G_2.\end{aligned}$$

Las matrices G_1 y G_2 son matrices de proyección porque $G_1^2 = G_1$ y $G_2^2 = G_2$:

- G_1 es la proyección oblicua sobre el subespacio generado por $[1 \ 1 \ 1]^T$ en la dirección del plano de ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
- G_2 es la proyección oblicua sobre el plano de ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ en la dirección del subespacio generado por $[1 \ 1 \ 1]^T$.

1.2. Teorema espectral para matrices diagonalizables.

Teorema 1.2. Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ es diagonalizable si y sólo si existen matrices $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ tales que

$$(1) \quad A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_m G_m,$$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

- a) G_i es la proyección sobre $\text{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{col}(A - \lambda_i I)$.
- b) $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- c) $G_1 + G_2 + \cdots + G_m = I$.

El desarrollo (1) se denomina la descomposición espectral de A , y las G_i se llaman los proyectores espectrales asociados.

Demostración. Si A es diagonalizable,

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^m \text{nul}(A - \lambda_i I).$$

Es decir, si $X_i \in \mathbb{K}^{n \times \mu(\lambda_i)}$, $i \in \mathbb{I}_m$, es una matriz cuyas columnas son una base de $\text{nul}(A - \lambda_i I)$, entonces $P = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_m]$ es una matriz inversible. Si P^{-1} se particiona en bloques Y_i^T de tamaños $\mu(\lambda_i) \times n$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{[X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_m]}_P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mu(\lambda_1)} & & & \\ & \lambda_2 I_{\mu(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m I_{\mu(\lambda_m)} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \vdots \\ Y_m^T \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \\ &= [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_m X_m] \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \vdots \\ Y_m^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \underbrace{X_1 Y_1^T}_{G_1} + \lambda_2 \underbrace{X_2 Y_2^T}_{G_2} + \cdots + \lambda_m \underbrace{X_m Y_m^T}_{G_m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_m G_m,$$

donde $G_i = X_i Y_i^T$.

Para probar c) escribimos

$$I = P P^{-1} = \sum_{i=1}^m X_i Y_i^T = \sum_{i=1}^m G_i.$$

Para probar b) observamos que

$$P^{-1} P = I \iff Y_i^T X_j = \begin{cases} I & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Esto implica que

$$G_i G_j = X_i Y_i^T X_j Y_j^T = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Para probar a) observamos que la relación $P^{-1} P = I$ también implica que

$$G_i^2 = X_i Y_i^T X_i Y_i^T = X_i Y_i^T = G_i \text{ para todo } i.$$

Esto significa que G_i es la proyección sobre $\text{col}(G_i)$ en la dirección de $\text{nul}(G_i)$.

Para probar que $\text{col}(G_i) = \text{nul}(A - \lambda_i I)$, escribimos

$$\text{col}(G_i) = \text{col}(X_i Y_i^T) \subseteq \text{col}(X_i) = \text{col}(X_i Y_i^T X_i) = \text{col}(G_i X_i) \subseteq \text{col}(G_i).$$

Por lo tanto,

$$\text{col}(G_i) = \text{col}(X_i) = \text{nul}(A - \lambda_i I).$$

Para probar que $\text{nul}(G_i) = \text{col}(A - \lambda_i I)$, usamos c) para escribir

$$A - \lambda_i I = \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j - \lambda_i \sum_{j=1}^k G_j = \sum_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_i) G_j = \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) G_j.$$

Multiplicando por G_i ambos lados de la igualdad y utilizando b) tenemos

$$G_i(A - \lambda_i I) = 0,$$

de donde resulta que $\text{col}(A - \lambda_i I) \subseteq \text{nul}(G_i)$. Como $\text{nul}(A - \lambda_i I) = \text{col}(G_i)$, el teorema de la dimensión implica

$\dim(\text{col}(A - \lambda_i I)) = n - \dim(\text{nul}(A - \lambda_i I)) = n - \dim(\text{col}(G_i)) = \dim(\text{nul}(G_i))$,
y por lo tanto, $\text{col}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(G_i)$.

Recíprocamente, si existen matrices G_1, G_2, \dots, G_k tales que $A = \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i$ que satisfacen las propiedades a), b) y c), entonces A es diagonalizable.

Por a) G_i es la proyección sobre $\text{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{col}(A - \lambda_i I)$. Esto implica que

$$\dim \text{col}(G_i) = \dim \text{nul}(A - \lambda_i I) = \mu(\lambda_i).$$

Por b) $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$. Esto implica que

$$\text{col}(G_i) \cap \left(\sum_{j \neq i} \text{col}(G_j) \right) = \{0\},$$

y en consecuencia

$$\text{col} \left(\sum_{i=1}^m G_i \right) = \bigoplus_{i=1}^k \text{col}(G_i).$$

Por c) $\sum_{i=1}^m G_i = I$. Por la fórmula para la dimensiones de una suma directa y el resultado anterior tenemos

$$n = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^m \text{col}(G_i) \right) = \sum_{i=1}^m \dim(\text{col}(G_i)) = \sum_{i=1}^m \mu(\lambda_i).$$

Esto último implica que A es diagonalizable. \square

2. PROBLEMAS DINÁMICOS

El modelo básico proviene de las potencias A, A^2, A^3, \dots de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. En general se trata de resolver o de analizar el comportamiento asintótico de un problema dinámico regulado por una ley de la forma

$$(2) \quad x_k = Ax_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

cuyo estado inicial está determinado por un vector x_0 .

La fórmula general del estado del sistema a tiempo k viene dada por el producto de las potencias de A por la condición inicial x_0 .

$$(3) \quad x_k = A^k x_0,$$

y su comportamiento asintótico viene dado por $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0$.

Lema 2.1. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable y $A = P\Lambda P^{-1}$, con $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible y $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal de la forma $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces

$$(4) \quad A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

Demostración. Ejercicio. □

Nota Bene. Nótese que la matriz $P = [v_1 \ \dots \ v_n]$ es la matriz de cambio de coordenadas $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ de la base de autovectores $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ en la base canónica \mathcal{E} de \mathbb{R}^n . Cuando A es diagonalizable, calcular $A^k x_0$ es sencillo. Para verlo basta escribir al vector x_0 en la forma

$$x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

Como $P^{-1}x_0 = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}x_0 = [x_0]^{\mathcal{B}} = [c_1 \ \dots \ c_n]$ podemos utilizar (4) para escribir

$$\begin{aligned} A^k x_0 &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \\ &= [v_1 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= [v_1 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ \vdots \\ c_n \lambda_n^k \end{bmatrix} \\ &= c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. Supongamos que la migración de la población entre dos regiones geográficas, digamos, el norte y el sur, es la siguiente. Cada año, el 50% de la población del norte migra hacia el sur, mientras que solo el 25% de la población del sur migra hacia el norte. Si este patrón de migración continúa, ¿la población del norte se reducirá permanentemente hasta que toda su población esté finalmente en el sur, o la distribución de la población se estabilizará de alguna manera antes de que el norte quede completamente despoblado?

Resolución. Sean n_k y s_k el total de pobladores en el norte y en el sur al finalizar el k -ésimo año, respectivamente. El patrón de migración indica que el total de pobladores en el norte y en el sur al finalizar el año siguiente será

$$\begin{cases} n_{k+1} = 0.5n_k + 0.25s_k, \\ s_{k+1} = 0.5n_k + 0.75s_k, \end{cases}$$

O, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix}$$

Se puede ver que

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/4)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{n_0 + s_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{s_0 - 2n_0}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} = \frac{n_0 + s_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que largo plazo la población inicial conjunta, $n_0 + s_0$ queda distribuida de la siguiente manera: 1/3 en el norte y 2/3 en el sur. Estas proporciones determinan el estado de equilibrio de la dinámica migratoria. Nótese que el sistema converge al equilibrio exponencialmente rápido

$$\left\| \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} - \frac{n_0 + s_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \frac{s_0 - 2n_0}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}|s_0 - 2n_0|}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

2.1. Potencias de matrices diagonalizables.

Definición 2.3. La norma Frobenius $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la norma inducida por el producto interno canónico en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Esto es, para cada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vale que

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Definición 2.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Decimos que la sucesión $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente si existe una matriz $A^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k - A^*\|_F = 0.$$

En tal caso, escribimos $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = A^*$ y decimos que A^k converge a A^* o que A^* es el límite de A^k cuando $k \rightarrow \infty$.

Nota Bene. Nótese que utilizando el Teorema espectral para matrices diagonalizables se puede comprobar que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable y $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, entonces

$$(5) \quad A^k = \lambda_1^k G_1 + \lambda_2^k G_2 + \dots + \lambda_m^k G_m,$$

donde cada G_i es la proyección sobre $\text{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\text{col}(A - \lambda_i I)$.

En lo que sigue mostraremos que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable, el comportamiento asintótico de la sucesión $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ está gobernado por el *radio espectral de A* que se define mediante

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Lema 2.5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable. Vale que

1. Si $\rho(A) < 1$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.
2. Si $\rho(A) > 1$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_F = +\infty$.
3. Si $\rho(A) = 1$ y $-1 \notin \sigma(A)$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = G_1$, donde G_1 es la proyección sobre $\text{nul}(A - I)$ en la dirección de $\text{col}(A - I)$.
4. Si $\rho(A) = 1$ y $-1 \in \sigma(A)$, entonces las sucesiones A^{2k} y A^{2k-1} son convergentes y $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{2k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} A^{2k-1}$.

Demostración. Adaptar las técnicas aprendidas en Análisis I para analizar el comportamiento de las sucesiones λ^k para distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Lema 2.6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \right) x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.