

---

Álgebra II (Curso 23)  
Segundo cuatrimestre, 2021  
**NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:**  
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 22 DE NOVIEMBRE  
Sebastian GRYNBERG

---

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Morfología de las pequeñas matrices no diagonalizables	2
2.1. En $\mathbb{R}^{2 \times 2}$	2
2.2. En $\mathbb{R}^{3 \times 3}$	3
3. Introducción a la forma canónica de Jordan	3
3.1. Teorema de Hamilton-Cayley	3
4. Miniaturas	4
4.1. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\sigma(A) = \emptyset$	4
4.2. $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}$ tal que $N^2 = 0$	5
4.3. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ y $\mu(\lambda) = 1$	6
5. Introducción a la forma canónica de Jordan	6
5.1. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , y $\mu(\lambda_1) < m(\lambda_1)$	6
5.2. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ , $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 2$	7
5.3. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ , $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 1$	8

## 1. INTRODUCCIÓN

Repasemos los motivos por los cuales una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no es diagonalizable. Consideramos el polinomio característico de  $A$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) \in \mathbb{R}_n[x],$$

y el conjunto de todas sus raíces reales  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \chi_A(\lambda) = 0\}$ . Vale que

$$\chi_A(x) = q(x) \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x - \lambda)^{m(\lambda)},$$

donde  $q \in \mathbb{R}_m[x]$ .

Si  $q$  no es constante, existen números complejos de la forma  $a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$  tales que  $\chi_A(a + bi) = 0$ . En este caso  $A$  no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Si

$$\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x - \lambda)^{m(\lambda)},$$

y para algún  $\lambda \in \sigma(A)$  vale que  $\mu(\lambda) = \dim(\text{nul}(A - \lambda I)) < m(\lambda)$ , entonces  $A$  tampoco es diagonalizable.

En otras palabras,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no es diagonalizable porque el polinomio característico no tiene suficientes raíces reales o porque algún autoespacio no tiene suficientes autovectores linealmente independientes.

## 2. MORFOLOGÍA DE LAS PEQUEÑAS MATRICES NO DIAGONALIZABLES

Aquí vamos a presentar las formas canónicas de las matrices no diagonalizables en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  y en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

**2.1. En  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .**

**Rotaciones seguidas de cambios de escala.** Esto es, matrices de la forma

$$\rho \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

donde  $\rho > 0$  y  $\theta \neq k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . En este caso la matriz no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  porque su polinomio característico

$$\chi(x) = (\rho \cos \theta - x)^2 + \rho^2 \text{sen}^2 \theta$$

no tiene raíces reales.

**Bloques de Jordan.** Esto es, matrices de la forma

$$J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En este caso la matriz no es diagonalizable porque la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es deficiente:  $\mu(\lambda) = 1 < 2$ .

**Teorema 2.1.** *Si  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz que no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , entonces  $A$  es semejante a alguna de las matrices presentadas más arriba.*

## 2.2. En $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

### 1. Bloque de Jordan

$$J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $J_3(\lambda)$  no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  porque la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es deficiente. En efecto,

$$J_3(\lambda) - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\text{nul} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{gen} \{e_1\}.$$

En este caso, tenemos que  $\mu(\lambda) = 1$  y  $m(\lambda) = 3$ .

### 2.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $J$  no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  porque la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es deficiente. En efecto,  $\text{nul}(J - \lambda I) = \text{gen}\{e_1, e_3\}$ . En este caso, tenemos que  $\mu(\lambda) = 2$  y  $m(\lambda) = 3$ .

### 3.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . La matriz no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  porque la multiplicidad geométrica de  $\lambda_1$  es deficiente. En este caso, tenemos que  $\mu(\lambda_1) = 1$  y  $m(\lambda_1) = 2$ .

### 4.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

donde  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$ . La matriz no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  porque su polinomio característico tiene raíces de la forma  $a \pm bi$ .

**Teorema 2.2.** Si  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz que no es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , entonces  $A$  es semejante a alguna de las cuatro tipos de matrices presentadas más arriba.

## 3. INTRODUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE JORDAN

### 3.1. Teorema de Hamilton-Cayley.

**Teorema 3.1.** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Si  $\chi_A(x) = \det(A - xI)$  el polinomio característico de  $A$ , entonces

$$\chi_A(A) = 0.$$

*Demostración.* Inmediata. □

## 4. MINIATURAS

**4.1.**  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\sigma(A) = \emptyset$ .

Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz cuyo espectro  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \chi_A(\lambda) = 0\} = \emptyset$ . Como el polinomio característico de  $A$ ,  $\chi_A(x)$ , es un polinomio de grado 2 de coeficientes reales, esto significa que las raíces complejas de  $\chi_A(x)$  son una pareja de números complejos conjugados, digamos  $\lambda = a + ib$  y  $\bar{\lambda} = a - ib$ , para algunos  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $b \neq 0$ .

¿Qué ocurre si consideramos que  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ? En ese caso el espectro complejo de  $A$  es

$$\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_A(\lambda) = 0\} = \{a + ib, a - ib\},$$

y como  $a + ib \neq a - ib$  porque  $b \neq 0$ , la matriz  $A$  es diagonalizable en  $\mathbb{C}^2$  porque existe una base de  $\mathbb{C}^2$  compuesta por autovectores de  $A$ . Veamos las características de ese tipo de base de  $\mathbb{C}^2$ .

Primero consideramos el autovector  $z \in \mathbb{C}^2$  correspondiente al autovalor  $\lambda = a + ib$ . Separando sus partes reales e imaginarias, el autovector  $z$  puede escribirse en la forma  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Como  $A(x + iy) = (a + ib)(x + iy)$  cuando separamos partes reales e imaginarias obtenemos que

$$(1) \quad Ax = ax - by \quad y \quad Ay = bx + ay.$$

En efecto, por un lado tenemos que  $A(x + iy) = Ax + iAy$ , y por el otro tenemos que  $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$ .

Esto significa que

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax & Ay \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax - by & bx + ay \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En lo sigue vamos a mostrar que

- $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- $\{x, y\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^2$ .

**Primer punto.** De las identidades (1) se puede deducir que  $x \neq 0$  y que  $y \neq 0$ . Veamos por qué. Si  $x = 0$ , de la primera identidad se deduce que  $0 = -by$  y como  $b \neq 0$ , resulta que también  $y = 0$  y en consecuencia  $z = 0$ , lo que constituye una contradicción porque  $z$  es un autovector de  $A$ . De la misma manera, si  $y = 0$  primero se concluye que  $0 = bx$  y de allí que  $x = 0$  que contradice que  $z$  es un autovector.

**Observación.** Conjugando ambos lados de la igualdad

$$A(x + iy) = (a + ib)(x + iy)$$

y observando que  $\bar{A} = A$  porque  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , se deduce que  $\bar{z}$  es un autovector de  $A$  correspondiente al autovalor  $\bar{\lambda}$ .

Ahora bien, como  $z$  y  $\bar{z}$  son autovectores asociados a autovalores distintos, el conjunto  $\{z, \bar{z}\}$  es una base de  $\mathbb{C}^2$  compuesta por autovectores de  $A$ . Tenemos así

que

$$A = \begin{bmatrix} z & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \bar{z} \end{bmatrix}^{-1}.$$

**Segundo punto.** En lo que sigue mostraremos que los vectores

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

son una base de  $\mathbb{R}^2$ . Para ello basta comprobar que son linealmente independientes. Consideramos dos escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha x + \beta y = 0$  y observamos que

$$\alpha x + \beta y = \frac{\alpha}{2}(z + \bar{z}) + \frac{\beta}{2i}(z - \bar{z}) = \left(\frac{\alpha - i\beta}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha + i\beta}{2}\right)\bar{z}.$$

Como  $\{z, \bar{z}\}$  es una base de  $\mathbb{C}^2$  la relación  $\alpha x + \beta y$ , implica que  $\frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = 0$  y de aquí se deduce que  $\alpha = \beta = 0$ .

**Conclusión.** Debido a que los vectores  $x, y$  definidos en (2) son una base de  $\mathbb{R}^2$ , las identidades (1) significan que

$$A = P \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde  $P = [x \quad y]$ .

**Forma geométrica.** Observamos ahora que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{bmatrix}.$$

Como el vector  $\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^T$  es un vector de norma euclídea unitaria y su segunda componente es no nula, se deduce que existe un único  $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  tal que  $\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^T = [\cos \theta \quad \sin \theta]^T$ . Poniendo  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  tenemos que

$$(3) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

**4.2.**  $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}$  tal que  $N^2 = 0$ .

Sea  $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz no nula, tal que  $N^2 = 0$ . Consideramos un vector no nulo  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $Nx \neq 0$  y observamos que el conjunto  $\{Nx, x\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ . Para eso, consideramos escalares  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que

$$0 = aNx + bx.$$

Multiplicando por  $N$  en ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$0 = N(aNx + bx) = aN^2x + bNx = 0 + bNx = bNx,$$

y como  $Nx \neq 0$ , se deduce que  $b = 0$  y de allí sigue que  $0 = aNx$ , de donde se deduce que  $a = 0$ . Poniendo  $P = [Nx \quad x]$  se obtiene que

$$(4) \quad N = P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

**4.3.**  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\sigma(A) = \{\lambda\}$  y  $\mu(\lambda) = 1$ .

Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz tal que su polinomio característico tiene la forma  $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es 1. En este escenario, tenemos que  $\{0\} \neq \text{nul}(A - \lambda I) \neq \mathbb{R}^2$  y que  $\text{nul}(A - \lambda I)^2 = \mathbb{R}^2$ . La matriz  $N = A - \lambda I$  satisface las condiciones enunciadas en la sección anterior. Si elegimos un vector  $x \notin \text{nul}(A - \lambda I)$  tenemos que el conjunto  $\{(A - \lambda I)x, x\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ , y que poniendo  $P = \begin{bmatrix} (A - \lambda I)x & x \end{bmatrix}$  se obtiene que

$$A - \lambda I = P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

De aquí se deduce que

$$(5) \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}.$$

## 5. INTRODUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE JORDAN

En lo que sigue vamos a extender los resultados obtenidos en las secciones 4.2 y 4.3 a matrices  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  cuyo polinomio característico se puede factorizar en  $\mathbb{R}_3[x]$  como producto de factores de grado 1 pero que no son diagonalizables. Hay tres escenarios distintos:

1.  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $m(\lambda_1) = 2$  y  $\mu(\lambda_1) = 1$ . En este caso mostraremos que existe una matriz inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que

$$(6) \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

2.  $\sigma(A) = \{\lambda\}$ ,  $m(\lambda) = 3$  y  $\mu(\lambda) = 2$ . En este caso mostraremos que existe una matriz inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que

$$(7) \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}.$$

3.  $\sigma(A) = \{\lambda\}$ ,  $m(\lambda) = 3$  y  $\mu(\lambda) = 1$ . En este caso mostraremos que existe una matriz inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que

$$(8) \quad A = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}.$$

En todos los casos ofreceremos un método para encontrar la matriz  $P$  que es casi idéntico al desarrollado en las secciones 4.2 y 4.3 para las matrices de  $2 \times 2$ .

**5.1.**  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , y  $\mu(\lambda_1) < m(\lambda_1)$ .

- Seleccionamos un vector

$$v_2 \in \text{nul}(A - \lambda_1 I)^2 \setminus \text{nul}(A - \lambda_1 I)$$

y definimos

$$v_1 := (A - \lambda_1 I)v_2.$$

De este modo tenemos que  $v_1$  es un autovector correspondiente al autovalor  $\lambda_1$ . Los argumentos desarrollados en las secciones 4.2 y 4.3 muestran que el conjunto  $\{v_1, v_2\}$  es linealmente independiente y constituye una base del subespacio  $\text{nul}(A - \lambda_1 I)^2$ .

- Seleccionamos un vector

$$v_3 \in \text{nul}(A - \lambda_2 I),$$

y observamos que  $v_3 \notin \text{nul}(A - \lambda_1 I)^2$ .

Esto es así porque

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)^2 v_3 &= (A - \lambda_1 I)((A - \lambda_1 I)v_3) = (A - \lambda_1 I)(\lambda_2 - \lambda_1)v_3 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(A - \lambda_1 I)v_3 = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 v_3. \end{aligned}$$

Como  $v_3 \neq 0$  y  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , se concluye que  $(A - \lambda_1 I)^2 v_3 \neq 0$ .

- Por construcción, el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  que satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1, \\ Av_2 &= v_1 + \lambda_1 v_2, \\ Av_3 &= \lambda_2 v_3. \end{aligned}$$

Matricialmente, esto significa que

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Poniendo  $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$  se obtiene el resultado anunciado en (6).

## 5.2. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ , $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 2$ .

La construcción es similar a la anterior.

Ponemos  $N = A - \lambda I$  y observamos que  $\sigma(N) = \{0\}$ ,  $N^3 = 0$  porque la multiplicidad algebraica de 0 es 3 y que  $\dim(\text{nul}(N)) = 2$ . En este caso,  $N^2 \neq 0$ .

Veamos por qué.

Elegimos una base  $\{w_1, w_2\}$  de  $\text{nul}(N)$  y la extendemos a una base de  $\mathbb{R}^3$ , digamos  $\{w_1, w_2, w_3\}$ . El teorema de la dimensión garantiza que  $\{Nw_3\}$  es una base de  $\text{col}(N)$ , motivo por el cual

$$N(Nw_3) = \tilde{\lambda}Nw_3,$$

para algún  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ . Como  $Nw_3 \neq 0$ , tenemos que  $\tilde{\lambda} \in \sigma(N) = \{0\}$ . En consecuencia  $N^2 w_3 = 0$ . Esto implica que  $N^2 = 0$  porque  $N^2 w_1 = N^2 w_2 = 0$  debido a que  $\{w_1, w_2\} \subset \text{nul}(N)$ .

Tenemos así que  $N^2 = 0$  pero  $N \neq 0$ .

- Seleccionamos un vector

$$v_2 \notin \text{nul}(N)$$

y definimos

$$v_1 := Nv_2.$$

De este modo tenemos que  $v_1$  es un autovector de  $N$ , correspondiente al autovalor 0. Los argumentos desarrollados en la secciones 4.2 y 4.3 muestran que el conjunto  $\{v_1, v_2\}$  es linealmente independiente.

- Seleccionamos un vector

$$v_3 \in \text{nul}(N) \setminus \text{gen}\{v_1\}.$$

Este vector existe porque  $\dim(\text{nul}(N)) = 2$ .

- Por construcción, el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  que satisface las siguientes propiedades:

$$Nv_1 = 0 \iff (A - \lambda I)v_1 = 0 \iff Av_1 = \lambda v_1,$$

$$Nv_2 = v_1 \iff (A - \lambda I)v_2 = v_1 \iff Av_2 = v_1 + \lambda v_2,$$

$$Nv_3 = 0 \iff (A - \lambda I)v_3 = 0 \iff Av_3 = \lambda v_3.$$

Matricialmente, esto significa que

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Poniendo  $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  se obtiene el resultado anunciado en (7).

### 5.3. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda\}$ , $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 1$ .

Argumentos similares a los desarrollados en la sección anterior muestran que en este caso  $(A - \lambda I)^3 = 0$  pero  $(A - \lambda I)^2 \neq 0$ .

- Seleccionamos un vector

$$v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{nul}(A - \lambda I)^2$$

y definimos

$$v_2 := (A - \lambda I)v_3,$$

$$v_1 := (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)^2 v_3.$$

De este modo tenemos que  $v_1$  es un autovector de  $A$ , correspondiente al autovalor  $\lambda$ .

Como antes, también se puede demostrar que el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es linealmente independiente. (Queda como ejercicio o para trabajar en el Discord si hay interés.)

- Por construcción, el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  que satisface las siguientes propiedades:

$$Av_1 = \lambda v_1,$$

$$Av_2 = v_1 + \lambda v_2$$

$$Av_3 = v_2 + \lambda v_3$$

Matricialmente, esto significa que

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Poniendo  $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  se obtiene el resultado anunciado en (8).