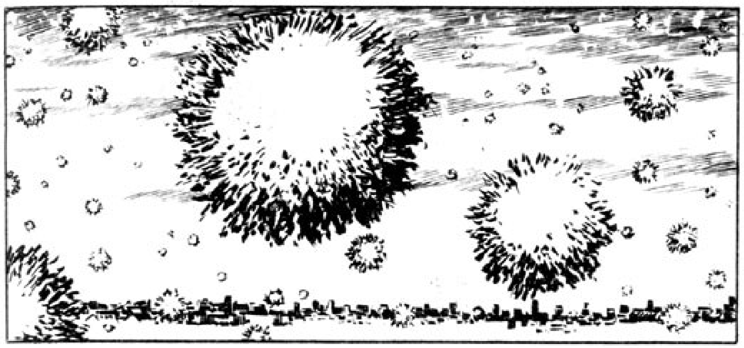
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
Notas en la emergencia sanitaria:
borradores para la clase del 24 de noviembre

Sebastian Grynberg



El único héroe válido es el héroe "en grupo",
nunca el héroe individual, el héroe solo.

H. G. Oesterheld

Índice

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales homogéneos

1.1. Para un planteo del problema.

En lo que sigue estudiaremos cómo resolver *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes homogéneos*, esto es, sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ & \vdots & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

donde las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ son las incógnitas y los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son constantes.

Enfocado desde el punto de vista matricial el sistema (1) adopta la forma

$$Y' = AY, \tag{2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es la función vectorial incógnita,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \; Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Resolver este sistema significa encontrar todas las funciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix}^T$$

tales que si las derivamos obtenemos el mismo resultado que si las multiplicamos por la matriz A.

Ejemplo 1.1 (Caso diagonal)**.** El sistema tiene la forma

$$Y' = \Lambda Y, \tag{3}$$

donde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Decir que $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ es solución del sistema (3) equivale a decir que para cada $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$y_j' = \lambda_j y_j. \tag{4}$$

Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4) son de la forma

$$y_j = c_j e^{\lambda_j t}, \text{ con } c_j \in \mathbb{R},$$

tenemos que las soluciones del sistema (3) son de la forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} & c_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j,$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ y $e_1, e_2, \dots, e_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Esto nos permite concluir que

$$\{Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : Y' = \Lambda Y\} = \operatorname{gen}\left\{e^{\lambda_1 t}e_1, e^{\lambda_2 t}e_2, \dots, e^{\lambda_n t}e_n\right\}.$$

Como el conjunto de funciones $\left\{e^{\lambda_1 t}e_1, e^{\lambda_2 t}e_2, \ldots, e^{\lambda_n t}e_n\right\}$ es linealmente independiente, tenemos que

$$\dim\left\{Y \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right) : Y' = \Lambda Y\right\} = n.$$

Comentario. Informalmente, resolver un sistema de la forma (2) es algo que se parece a realizar n-integraciones simultáneamente. Por cada integración obtenemos una constante. Estas constantes se pueden fijar de antemano por las condiciones iniciales del sistema. En cualquier caso, la solución general tiene la forma

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + \cdots + c_n Y_n(t)$$

donde $\{Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes de $Y' = AY$. Por lo tanto, si podemos encontrar esas n soluciones linealmente independientes, el problema está resuelto.

1.2. Problema de valores iniciales: el teorema de existencia y unicidad.

El resultado siguiente es la herramienta principal para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.2 (Existencia y unicidad)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario pero fijo, y sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Existe una, y sólo una, solución al problema de valores iniciales*

$$\left\{\begin{array}{l} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Sobre las soluciones no triviales. Nótese que si $Y(t)$ es una solución no trivial del sistema (2), entonces $Y(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es así porque si $Y(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $Y(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, porque ella, y la solución trivial, satisfacen el mismo sistema de ecuaciones y tienen el mismo valor inicial en $t = t_0$.

Corolario 1.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo* (2)

$$\mathbb{S} = \left\{Y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : Y' = AY\right\},$$

es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

Demostración. Que $\mathbb{S}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial es una consecuencia inmediata del lema de 3×8. Para demostrar que $\dim(\mathbb{S}) = n$ tenemos que mostrar una base de $\mathbb{S}$ conformada por n elementos. Consideramos $\Phi_j(t)$, $j \in \mathbb{I}_n$, la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} Y' = AY, \\ Y(0) = e_j, \end{array}\right. \tag{6}$$

donde e_j es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La existencia y unicidad de Φ_j está garantizada por el Teorema 1.2.

Para probar que el conjunto $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ es linealmente independiente escribimos la ecuación

$$c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_n\Phi_n = 0,$$

y la evaluamos en $t = 0$. Tenemos que

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n = 0.$$

Como $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es linealmente independiente, resulta que $c_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. Por lo tanto, el conjunto $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ es linealmente independiente.

Para probar que el conjunto $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ genera $\mathbb{S}$ elegimos $Y \in \mathbb{S}$ y la evaluamos en $t = 0$:

$$Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T.$$

Con estas constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ construimos la función vectorial

$$\Phi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \cdots + c_n \Phi_n.$$

La función Φ es solución del sistema (2) porque es una combinación lineal de soluciones del mismo. Además $\Phi(0) = Y(0)$, y por el teorema de existencia y unicidad, resulta que $\Phi = Y$. □

Definición 1.4. *Decimos que* $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (2) *si es un conjunto de soluciones de* (2) *linealmente independiente.*

Pregunta. ¿Qué podemos hacer para hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$? En lo que sigue vamos a mostrar que este tipo de conjuntos se pueden obtener analizando el espectro de la matriz A y la estructura de sus autoespacios. El siguiente resultado proporciona la clave de todo el asunto.

Lema 1.5. *Si* $\lambda \in \sigma(A)$ *y* $v \in \operatorname{nul}(A - \lambda I)$, *entonces la función* $Y(t) = e^{\lambda t} v$ *es solución del sistema* $Y' = AY$.

Demostración. Usando que $v \in \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ podemos escribir

$$AY = A\left(e^{\lambda t} v\right) = e^{\lambda t} A v = e^{\lambda t} \lambda v = \left(e^{\lambda t} v\right)' = Y'.$$

□

1.3. Caso diagonalizable.

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable, existe una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a n autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$: $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_n$. Considerando las matrices

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tenemos que P es inversible y que $A = P \Lambda P^{-1}$. Factorizando A y reagrupando términos podemos escribir

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff Y' = (P\Lambda P^{-1})Y \iff P^{-1}Y' = \Lambda P^{-1} Y \\ &\iff \left(P^{-1}Y\right)' = \Lambda\left(P^{-1}Y\right). \end{aligned}$$

Esto significa que Y es solución del sistema $Y' = AY$ si, y sólo si, $Z = P^{-1}Y$ es solución del sistema diagonal $Z' = \Lambda Z$. Utilizando el resultado del Ejemplo 1.1, la solución general del sistema $Z' = \Lambda Z$ es

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j.$$

En consecuencia, la solución general del sistema $Y' = AY$ es

$$Y = PZ = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} P e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j.$$

En particular $\left\{e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \ldots, e^{\lambda_n t}v_n\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

Ejemplo 1.6. Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolución. El polinomio característico de A es $\chi_A(x) = -(x+2)(x-1)(x-3)$, el espectro es $\sigma(A) = \{-2, 1, 3\}$, y los autoespacios correspondientes son

$$\begin{aligned} \operatorname{nul}(A + 2I) &= \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}, \\ \operatorname{nul}(A - I) &= \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}, \\ \operatorname{nul}(A - 3I) &= \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$. □

Ejemplo 1.7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz considerada en el ejemplo anterior. Hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = AY, \\ Y(0) = Y_0, \end{array} \right. \tag{7}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

Resolución. La solución general del sistema $Y' = AY$ es

$$Y(t) = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

En consecuencia,

$$Y(0) = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Por lo tanto, si $Y_0 = \begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}^T$, los escalares c_1, c_2, c_3 deben ser la solución del sistema

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}.$$

Despejando, tenemos que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 6\\ -1 & 2 & -3\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2\eta_1 - 2\eta_2 + 6\eta_3\\ -\eta_1 + 2\eta_2 - 3\eta_3\\ 3\eta_1 + 3\eta_3\end{bmatrix}. \qquad (10)\end{aligned}$$

De (8) y (10) concluimos que la solución del problema de valores iniciales (7) con $Y_0 = \begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}^T$ es

$$\begin{aligned}Y(t) = &\left(\frac{-2\eta_1 - 2\eta_2 + 6\eta_3}{6}\right)e^{-2t}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\\ &+ \left(\frac{-\eta_1 + 2\eta_2 - 3\eta_3}{6}\right)e^{t}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix} + \left(\frac{3\eta_1 + 3\eta_3}{6}\right)e^{3t}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De (8) y (9) podemos concluir que

$$\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{S}_{-2}$$

y que

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = +\infty \iff Y(0) \notin \mathbb{S}_{-2}$$

$\square$

Nota Bene. Nótese que el resultado obtenido en el ejemplo anterior es un caso particular del siguiente resultado general.

Teorema 1.8 (Comportamiento asintótico)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable, sea $\sigma(A)$ el espectro de A, y sea $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ la única solución del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} Y' = AY,\\ Y(0) = Y_0.\end{cases}$$

Valen las siguientes afirmaciones:

1. $$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0 \iff Y_0 \in \bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(A):\\ \lambda<0}} \mathbb{S}_\lambda,$$

   donde $\mathbb{S}_\lambda = \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ es el autoespacio asociado al autovalor λ.

2. *Si* $0 \in \sigma(A)$,

$$\Phi(t) = Y_0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \iff Y_0 \in \mathbb{S}_0,$$

donde $\mathbb{S}_0 = \mathrm{nul}(A)$.

3. *La norma de* $\Phi(t)$ *está acotada cuando* $t \to +\infty$ *si, y solo si,* $Y_0 \in \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A): \\ \lambda \leq 0}} \mathbb{S}_\lambda$.

Demostración. Los resultados se obtienen observando que la solución general del sistema $Y' = AY$ tiene la forma

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j,$$

donde $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av_j = \lambda_j v_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. En consecuencia,

$$Y(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} Y(t) = 0 &\iff c_j = 0 \text{ para todo } j \text{ tal que } \lambda_j \geq 0 \\ &\iff Y(0) \in \mathrm{gen}\{v_j : \lambda_j < 0\}. \end{aligned}$$

Etcétera. □

1.4. Autovalores en $\mathbb{C}$.

Lema 1.9. *Si* $a + bi$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $b \neq 0$, *es un autovalor de la matriz* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *y* $x + iy \in \mathbb{C}^n$ *es un autovector de* A *asociado al autovalor* $a + bi$, *entonces el conjunto*

$$\left\{ e^{at} \cos(bt)x - e^{at} \operatorname{sen}(bt)y,\ e^{at} \cos(bt)y + e^{at} \operatorname{sen}(bt)x \right\} \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

es un conjunto de soluciones reales linealmente independiente del sistema $Y' = AY$.

Demostración. Cuando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y su polinomio característico tiene una raíz compleja $\lambda = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, sabemos que

1. $\{\lambda, \overline{\lambda}\} \subset \sigma_{\mathbb{C}}(A)$.
2. Los autovectores correspondientes de λ son de la forma $v = x + iy$, con $\{x, y\}$ un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$.
3. Si $v = x + iy$ es un autovector correspondiente a λ, entonces $\overline{v} = x - iy$ es un autovector correspondiente a $\overline{\lambda} = a - bi$.

De acuerdo con el Lema 1.5, las funciones $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ definidas por

$$\Phi_1(t) = e^{\lambda t} v, \quad \Phi_2(t) = e^{\overline{\lambda} t} \overline{v} = \overline{\Phi_1(t)}$$

son dos soluciones compleja del sistema $Y' = AY$.

El conjunto $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ es linealmente independiente porque $\Phi_1(0) = v$ y $\Phi_2(0) = \overline{v}$ son autovectores asociados a diferentes autovalores de A. Descomponiendo a $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ en sus partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= \Re(\Phi_1(t)) + i\Im(\Phi_1(t)),\\ \Phi_2(t) &= \Re(\Phi_1(t)) - i\Im(\Phi_1(t)),\end{aligned}$$

se deduce que

$$\operatorname{gen}\{\Re(\Phi_1), \Im(\Phi_1)\} = \operatorname{gen}\{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Por otra parte $\Re(\Phi_1), \Im(\Phi_1)$ son soluciones del sistema $Y' = AY$ porque

$$\Re(\Phi_1(t)) = \frac{1}{2}\left(\Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right), \quad \Im(\Phi_1(t)) = \frac{1}{2i}\left(\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\right).$$

Como

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= e^{\lambda t}v = e^{(a+bi)t}(x+iy) = \left(e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\operatorname{sen}(bt)\right)(x+iy)\\ &= e^{at}\cos(bt)x - e^{at}\operatorname{sen}(bt)y + i\left(e^{at}\cos(bt)y + e^{at}\operatorname{sen}(bt)x\right),\end{aligned}$$

se concluye que el conjunto

$$\left\{e^{at}\cos(bt)x - e^{at}\operatorname{sen}(bt)y, e^{at}\cos(bt)y + e^{at}\operatorname{sen}(bt)x\right\},$$

es un conjunto linealmente independiente de soluciones del sistema $Y' = AY$. □

Ejemplo 1.10. Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - 6x + 13$ y sus raíces son $3 + 2i$ y $3 - 2i$. El vector

$$\begin{bmatrix} -i\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix}$$

es un autovector correspondiente al autovalor $3 + 2i$. Utilizando el Lema 1.9 y el Corolario 1.3 se concluye que el conjunto

$$\begin{aligned}&\left\{e^{3t}\cos(2t)\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix} - e^{3t}\operatorname{sen}(2t)\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix}, e^{3t}\cos(2t)\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix} + e^{3t}\operatorname{sen}(2t)\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}\\ &= \left\{\begin{bmatrix} e^{3t}\operatorname{sen}(2t)\\ e^{3t}\cos(2t)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{3t}\cos(2t)\\ e^{3t}\operatorname{sen}(2t)\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$. □

1.5. Caso no diagonalizable con autovalores en $\mathbb{R}$.

Nota Bene. Nótese que si $A = PJP^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}Y' = AY &\iff Y' = (PJP^{-1})Y \iff P^{-1}Y' = JP^{-1}Y\\ &\iff \left(P^{-1}Y\right)' = J\left(P^{-1}Y\right).\end{aligned}$$

Esto significa que Y es solución del sistema $Y' = AY$ si, y sólo si, $Z = P^{-1}Y$ es solución del sistema $Z' = JZ$.

1.5.1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

En este caso $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 2$ y $\mu(\lambda) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Si ponemos $Z = P^{-1}Y$, el sistema $Y' = AY$ se transforma en el sistema $Z' = JZ$:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda z_2 \end{bmatrix},$$

que se resuelve por cuadraturas de abajo para arriba:

$$z_2' = \lambda z_2 \iff z_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} z_1' = \lambda z_1 + z_2 &\iff z_1' - \lambda z_1 = c_2 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_2 \in \mathbb{R}, \\ &\iff z_1 = c_2 t e^{\lambda t} + c_1 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución del sistema $Z' = JZ$ tiene la forma

$$Z = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda t} e_1 + c_2 e^{\lambda t}(t e_1 + e_2).$$

En consecuencia, la solución de $Y' = AY$ tiene la forma

$$Y = PZ = P\left(c_1 e^{\lambda t} e_1 + c_2 e^{\lambda t}(t e_1 + e_2)\right) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}(t v_1 + v_2),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nota Bene. Nótes que en este caso,

$$\left\{e^{\lambda t} v_1, e^{\lambda t}(t v_1 + v_2)\right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

1.5.2. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Hay tres escenarios distintos:

Escenario 1. $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Si ponemos $Z = P^{-1}Y$, el sistema $Y' = AY$ se transforma en el sistema $Z' = JZ$:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda z_2 + z_3 \\ \lambda z_3 \end{bmatrix},$$

que se resuelve por cuadraturas de abajo para arriba:

$$\begin{aligned}
z_3' = \lambda z_3 &\iff z_3 = c_3 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_3 \in \mathbb{R}. \\
z_2' = \lambda z_2 + z_3 &\iff z_2' - \lambda z_2 = c_3 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_3 \in \mathbb{R} \\
&\iff z_2 = c_3 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \\
z_1' = \lambda z_1 + z_2 &\iff z_1' - \lambda z_1 = c_3 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \\
&\iff z_1 = c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_1 e^{\lambda t}, \quad \text{con} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

La solución del sistema $Z' = JZ$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
Z &= \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\
&= c_1 e^{\lambda t} e_1 + c_2 e^{\lambda t}(t e_1 + e_2) + c_3 e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2} e_1 + t e_2 + e_3 \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia, la solución de $Y' = AY$ tiene la forma

$$Y = PZ = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}(t v_1 + v_2) + c_3 e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2} v_1 + t v_2 + v_3 \right)$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nota Bene. Nótese que en este caso,

$$\left\{ e^{\lambda t} v_1,\ e^{\lambda t}(t v_1 + v_2),\ e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2} v_1 + t v_2 + v_3 \right) \right\} \tag{11}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Ejemplo 1.11 (Tigre)**.** Hallar un sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. *Análisis de la estructura de A.* El polinomio característico es

$$\chi_A(x) = -(x+3)^3,$$

el espectro es $\sigma(A) = \{-3\}$ y el autoespacio correspondiente es

$$\operatorname{nul}(A + 3I) = \operatorname{nul}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como $\sigma(A) = \{-3\}$ y $\mu(-3) = 1$, la matriz A tiene la siguiente forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. *Construcción de una base de Jordan.* Como la matriz $N = A + 3I$ es una matriz nilpotente de índice 3, hay que encontrar un vector $v \notin \mathrm{nul}(N^2)$ para construir la cadena de Jordan $\{N^2v, Nv, v\}$. Como

$$\begin{aligned}\mathrm{nul}(N^2) &= \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^2\right) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\end{aligned}$$

podemos elegir $v = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, y entonces

$$N^2v = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T, \quad Nv = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T.$$

Tenemos que la matriz

$$P = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$

es tal que $A = PJP^{-1}$.

3. *Construcción del sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.* Se obtiene reemplazando los resultados obtenidos en la forma general (11):

$$\left\{e^{-3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, e^{-3t}\left(t\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right), e^{-3t}\left(\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right\}.$$

Etcétera.

Nota Bene. Nótese que el proceso de resolución del problema anterior se puede optimizar suprimiendo algunos pasos innecesarios. Los mismos se dieron a efectos de ilustrar la metodología que permite hallar la forma canónica de Jordan J de la matriz A y la matriz P que permite transformar una en la otra.

Escenario 2. $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 2$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} \text{ y } J = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Razonando como en el caso anterior se obtiene que

$$\left\{e^{\lambda t}v_1,\ e^{\lambda t}(tv_1 + v_2),\ e^{\lambda t}v_3\right\} \tag{12}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Ejemplo 1.12 (León)**.** Hallar un sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. *Análisis de la estructura de A.* El polinomio característico es
$$\chi_A(x) = -(x+3)^3,$$
el espectro es $\sigma(A) = \{-3\}$ y el autoespacio correspondiente es
$$\mathrm{nul}(A+3I) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$
Como $\sigma(A) = \{-3\}$ y $\mu(-3) = 2$, la matriz A tiene la siguiente forma canónica de Jordan
$$J = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$
2. *Construcción de una base de Jordan.* Como la matriz $N = A + 3I$ es una matriz nilpotente de índice 2, el primer bloque se obtiene hallando un vector $v \notin \mathrm{nul}(N)$ y construyendo la cadena de Jordan $\{Nv, v\}$. Podemos elegir $v = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y entonces $Nv = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T$. El segundo bloque se construye hallando un vector $w \in \mathrm{nul}(N)$ que no sea un múltiplo de Nv. Por ejemplo, $w = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$. Tenemos que la matriz
$$P = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$
es tal que $A = PJP^{-1}$.
3. *Construcción del sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.* Se obtiene reemplazando los resultados obtenidos en la forma general (12):
$$\left\{e^{-3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ e^{-3t}\left(t\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right),\ e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$
Etcétera.

Escenario 3. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $m(\lambda_1) = 2$ y $\mu(\lambda_1) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si
$$P = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} \text{ y } J = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix},$$
entonces
$$A = PJP^{-1}.$$
Razonando como en el primer caso se obtiene que
$$\left\{e^{\lambda_1 t}v_1,\ e^{\lambda_1 t}(tv_1 + v_2),\ e^{\lambda_2 t}v_3\right\} \tag{13}$$
es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Ejemplo 1.13 (Leopardo)**.** Hallar un sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolución.

1. *Análisis de la estructura de A.* El polinomio característico es

$$\chi_A(x) = -(x+3)^2(x-3),$$

el espectro es $\sigma(A) = \{-3, 3\}$ y los autoespacios correspondientes son

$$\operatorname{nul}(A+3I) = \operatorname{nul}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\operatorname{nul}(A-3I) = \operatorname{nul}\left(\begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Como $\sigma(A) = \{-3, 3\}$, $\mu(-3) = 1$ y $\mu(3) = 1$, la matriz A tiene la siguiente forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. *Construcción de una base de Jordan.* Para obtener el primer bloque necesitamos hallar

$$v \in \operatorname{nul}\left((A+3I)^2\right) \setminus \operatorname{nul}(A+3I)$$

y construir la cadena de Jordan $\{(A+3I)v, v\}$. Como

$$\operatorname{nul}\left((A+3I)^2\right) = \operatorname{nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 36 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

podemos elegir $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y entonces $(A+3I)v = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$. El segundo bloque se construye eligiendo un autovector w correspondiente al autovalor $\lambda_2 = 3$, por ejemplo, $w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Tenemos que la matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

es tal que $A = PJP^{-1}$.

3. *Construcción del sistema fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.* Se obtiene reemplazando los resultados obtenidos en la forma general (13):

$$\left\{ e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, e^{-3t}\left(t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Etcétera.