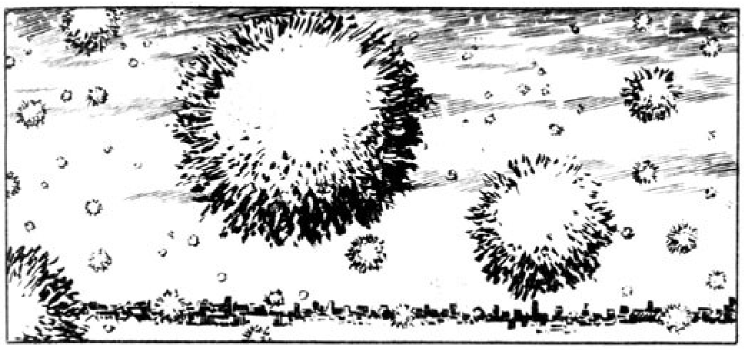
# Álgebra II (Curso 23)
## Segundo cuatrimestre, 2021
## Notas en la emergencia sanitaria:
### borradores para la clase del 1 de diciembre

Sebastian Grynberg



*El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. Oesterheld

## Índice

# 1. Propiedades de las matrices simétricas

## 1.1. Subespacios fundamentales.

**Lema 1.1.** *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica, el subespacio nulo de $A$ es ortogonal al subespacio columna de $A$. En otras palabras,*

$$\mathrm{nul}(A) \perp \mathrm{col}(A).$$

*Demostración.* Inmediata: $\mathrm{nul}(A) \perp \mathrm{col}(A^T) = \mathrm{col}(A)$. □

## 1.2. Espectro.

**Lema 1.2.** *Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son números reales.*

*Demostración.* Si $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(A)$ y $z \in \mathrm{nul}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda\|z\|^2 &= \lambda \langle z, z\rangle = \langle \lambda z, z\rangle = \langle Az, z\rangle = \langle z, A^* z\rangle \\ &= \langle z, Az\rangle = \langle z, \lambda z\rangle = \overline{\lambda} \langle z, z\rangle = \overline{\lambda}\|z\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|z\|^2 \neq 0$, resulta que $\lambda = \overline{\lambda}$. Por lo tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

## 1.3. Autoespacios.

**Lema 1.3.** *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica, autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales entre sí. En otras palabras,*

$$\mathrm{nul}(A - \lambda_i I) \perp \mathrm{nul}(A - \lambda_j I) \quad \textit{para} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

*Demostración.* Sean $x \in \mathrm{nul}(A - \lambda_i I)$ e $y \in \mathrm{nul}(A - \lambda_j I)$, vale que

$$\lambda_i \langle x, y\rangle = \langle \lambda_i x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \lambda_j y\rangle = \lambda_j \langle x, y\rangle .$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, resulta que $\langle x, y\rangle = 0$. Por lo tanto, $x \perp y$. □

## 1.4. Teorema espectral.

**Teorema 1.4.** *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ es simétrica si y sólo si existen matrices $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ tales que*

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m, \tag{1}$$

*donde las $P_i$ tienen las siguientes propiedades*

a) *$P_i$ es la proyección ortogonal sobre* $\mathrm{nul}(A - \lambda_i I)$.
b) *$P_i P_j = 0$ para $i \neq j$.*
c) *$P_1 + P_2 + \cdots + P_m = I$.*

**Nota Bene.** Nótese que si $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un sistema ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $U_r = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, entonces

$$P = U_r U_r^T$$

es la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathrm{gen}\{u_1, \dots, u_r\}$. En efecto,

$$Px = U_r U_r^T x = \left(\sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T\right) x = \sum_{j=1}^{r} \left(u_j^T x\right) u_j = \sum_{j=1}^{r} \langle x, u_j\rangle\, u_j.$$

### 1.5. Courant-Fisher.

Como los autovalores de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son números reales, se los puede organizar en forma decreciente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Además, existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $U^T A U = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, o, lo que es lo mismo $A = U\Lambda U^T$. Definiendo $y = U^T x$ podemos escribir

$$x^T A x = x^T U \Lambda U^T x = y^T \Lambda y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2. \tag{2}$$

Como $\|y\| = \|U^T x\| = \|x\|$, las relaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \leq \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \lambda_1 \|y\|^2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 = \lambda_1 \text{ para } y = e_1,$$

junto a las identidades (2), implican que

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} x^T A x.$$

Del mismo modo, las relaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \geq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \lambda_n \|y\|^2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 = \lambda_n \text{ para } y = e_n,$$

implican que

$$\lambda_n = \min_{\|x\|=1} x^T A x.$$

Con un poco más de trabajo se puede demostrar el siguiente resultado

**Teorema 1.5** (Courant-Fischer)**.** *Los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son*

$$\lambda_i = \min_{\dim(\mathbb{S})=n-i+1} \; \max_{x\in\mathbb{S}:\|x\|=1} x^T A x$$

*Demostración.* Usando una diagonalización ortogonal de $A$ el problema se reduce a demostrar que

$$\lambda_i = \min_{\dim(\mathbb{S})=n-i+1} \max_{y\in\mathbb{S}:\|y\|=1} y^T\Lambda y$$

Sea $\mathbb{T} = \text{gen}\{e_1,\dots,e_i\} \neq \{0\}$. Si $\mathbb{S}$ tiene dimensión $n+i-1$, entonces $\mathbb{S}\cap\mathbb{T} \neq \{0\}$. Si se supone lo contrario se obtiene una contradicción. Consideramos

$$\Sigma_{\mathbb{S}} = \{y \in \mathbb{S} : \|y\| = 1\}.$$

Como $\mathbb{S}\cap\mathbb{T} \neq \{0\}$, $\Sigma_{\mathbb{S}}\cap\mathbb{T} \neq \emptyset$. Para cada $y \in \Sigma_{\mathbb{S}}\cap\mathbb{T}$ vale que

$$y^T\Lambda y = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j y_j^2 \geq \lambda_i \sum_{j=1}^{i} y_j^2 = \lambda_i$$

Como $\Sigma_{\mathbb{S}}\cap\mathbb{T} \subseteq \Sigma_{\mathbb{S}}$, tenemos

$$\max_{y\in\Sigma_{\mathbb{S}}} y^T\Lambda y \geq \max_{y\in\Sigma_{\mathbb{S}}\cap\mathbb{T}} y^T\Lambda y = \lambda_i,$$

y en consecuencia,

$$\min_{\dim(\mathbb{S})=n-i+1} \max_{y\in\Sigma_{\mathbb{S}}} y^T\Lambda y \geq \lambda_i.$$

Si $\mathbb{S}^* = \{e_1,\dots,e_{i-1}\}$

$$y^T\Lambda y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \leq \lambda_i \sum_{j=i}^{n} y_j^2 = \lambda_i \text{ para todo } y \in \Sigma_{\mathbb{S}^*}.$$

En consecuencia,

$$\min_{\dim(\mathbb{S})=n-i+1} \max_{y\in\Sigma_{\mathbb{S}}} y^Y\Lambda y \leq \max_{y\in\Sigma_{\mathbb{S}^*}} y^Y\Lambda y \leq \lambda_i,$$

y por lo tanto,

$$\lambda_i = \min_{\dim(\mathbb{S})=n-i+1} \max_{y\in\mathbb{S}:\|y\|=1} y^T\Lambda y.$$

□

## 2. Para un estudio de $A^TA$

**Nota Bene.** Nótese que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica.

### 2.1. Subespacios fundamentales.

**Lema 2.1.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Vale que*

$$\text{nul}(A^TA) = \text{nul}(A)$$
$$\text{col}(A^TA) = \text{col}(A^T)$$

*Demostración.* Ejercicio. □

### 2.2. Espectro.

**Lema 2.2.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Vale que $\sigma\left(A^T A\right) \subset \mathbb{R}^+$.*

*Demostración.* Si $\lambda \in \sigma\left(A^T A\right)$ y $x \in \text{nul}(A^T A - \lambda I) \setminus \{0\}$, entonces

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \left\langle A^T A x, x\right\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2.$$

Como $\|x\|^2 > 0$ y $\|Ax\|^2 \geq 0$, resulta que $\lambda \geq 0$. Por lo tanto, $\sigma\left(A^T A\right) \subset \mathbb{R}^+$. □

### 2.3. Diagonalización ortogonal.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $r$. Como $\text{rango}(A^T) = \text{rango}(A)$ y $\text{col}(A^T A) = \text{col}(A^T)$ tenemos que $\text{rango}(A^T A) = r$. Ordenando los autovalores no nulos de $A^T A$ de manera decreciente podemos escribir $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$. Como $A^T A$ es simétrica, existe una matriz ortogonal $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A^T A = V \Lambda V^T,$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$.

**Nota Bene.** Nótese que si $V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, entonces

$$A^T A v_i = \lambda_i v_i.$$

### 2.4. Estructura geométrica de $A$.

**Lema 2.3.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $r$. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base ortonormal de $\text{col}(A^T)$ compuesta por autovectores de $A^T A$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$, entonces los vectores de $\mathbb{R}^m$ definidos por*

$$u_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i, \quad i \in \mathbb{I}_r, \tag{3}$$

*constituyen una base ortonormal del espacio columna de $A$ y además vale que*

$$A v_i = \sqrt{\lambda_i} u_i. \tag{4}$$

*Demostración.* Una cuenta:

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \langle A v_i, A v_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \left\langle v_i, A^T A v_j\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \langle v_i, v_j\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

**Nota Bene.** Nótese que las igualdades (4) significan que

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Definiendo

- $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ para cada $i \in \mathbb{I}_r$,

- $\Sigma_r := \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}$,
- $V_r := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix}$,
- $U_r := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{bmatrix}$,

tenemos que

$$AV_r = U_r \Sigma_r. \tag{6}$$

Podemos completar la base ortonormal de $\operatorname{col}(A^T)$, $\{v_1, \ldots, v_r\}$, a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ y la base ortonormal de $\operatorname{col}(A)$, a una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$, $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_m\}$. Definiendo

$$V_{n-r} = \begin{bmatrix} v_{r+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix} \text{ y } U_{m-r} = \begin{bmatrix} u_{r+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} V_r & V_{n-r} \end{bmatrix}}_{V \in \mathbb{R}^{n \times n}} = \begin{bmatrix} AV_r & AV_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r \Sigma_r & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_r & U_{m-r} \end{bmatrix}}_{U \in \mathbb{R}^{m \times m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}}. \tag{7}$$

**Teorema 2.4** (Descomposición en valores singulares)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango $r$. Existe una factorización de la forma*

$$A = U \Sigma V^T,$$

*donde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de la forma*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

*con $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.*