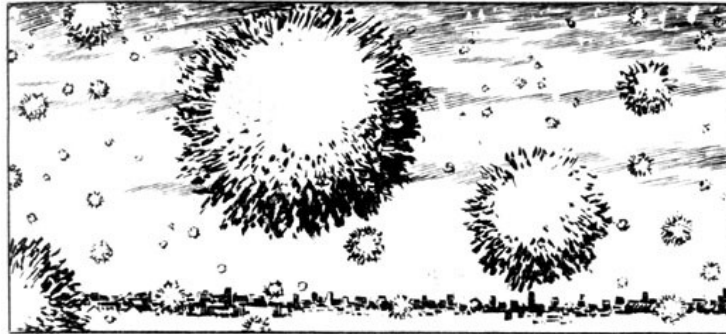

Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2021
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA CLASE DEL 13 DE DICIEMBRE
Sebastian GRYNBERG



*El único héroe válido es el héroe “en grupo”,
nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. OESTERHELD

ÍNDICE

1. Extremos sobre la esfera unitaria	2
1.1. Imagen de la esfera unitaria	2
1.2. Teorema de Rayleigh: extremos sobre la esfera unitaria	2
2. Extremos sobre elipsoides	3
2.1. Teorema de Rayleigh: extremos sobre elipsoides	5

1. EXTREMOS SOBRE LA ESFERA UNITARIA

1.1. Imagen de la esfera unitaria.

Sea $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre \mathbb{R}^n . Los valores de Q sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ están unívocamente determinados por sus valores sobre la esfera unitaria de \mathbb{R}^n ,

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Esto es así porque todo vector $x \neq 0$ se puede representar en la forma

$$x = \|x\|\hat{x},$$

donde $\hat{x} = \frac{1}{\|x\|}x$ es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector x , y entonces

$$Q(x) = Q(\|x\|\hat{x}) = \|x\|^2 Q(\hat{x}).$$

1.2. Teorema de Rayleigh: extremos sobre la esfera unitaria.

Como las formas cuadráticas en \mathbb{R}^n son funciones continuas y la esfera unitaria es un conjunto compacto de \mathbb{R}^n , las mismas deben alcanzar sus valores máximo y mínimo sobre la mencionada esfera.

El siguiente resultado, conocido bajo el nombre de *Teorema de Rayleigh*, nos informa cuáles son los valores máximo y mínimo de una forma cuadrática restringida a la esfera unitaria y los vectores que los realizan.

Teorema 1.1 (Teorema de Rayleigh). *Sea $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de la forma $Q(x) = x^T A x$, con $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$. Sea $\sigma(A)$ el espectro de A y para cada $\lambda \in \sigma(A)$ sea $\mathbb{S}_\lambda = \text{nul}(A - \lambda I)$ el autoespacio correspondiente a λ . Vale que:*

$$\begin{aligned} \max_{\|x\|=1} Q(x) &= \lambda_M \quad \text{y} \quad \operatorname{argmax}_{\|x\|=1} Q(x) = S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_M}, \\ \min_{\|x\|=1} Q(x) &= \lambda_m \quad \text{y} \quad \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} Q(x) = S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_m}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_M = \max \sigma(A)$ y $\lambda_m = \min \sigma(A)$.

Demostración. Descomponiendo cada $x \in \mathbb{R}^n$ en sus componentes respecto de los autoespacios de la matriz A , tenemos $x = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} x_\lambda$, donde $x_\lambda = P_{\mathbb{S}_\lambda}(x)$ para cada $\lambda \in \sigma(A)$. Como $x_\lambda \perp x_{\lambda'}$ para $\lambda \neq \lambda'$, el Teorema de Pitágoras implica que

$$(1) \quad \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \|x_\lambda\|^2,$$

y como

$$(2) \quad Q(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \|x_\lambda\|^2,$$

resulta

$$(3) \quad \lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2.$$

En particular, para todo $x \in S_{n-1}$ vale que

$$(4) \quad \lambda_m \leq Q(x) \leq \lambda_M.$$

Además, para $x \in S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_m}$ tenemos que $Q(x) = \lambda_m$ y para $x \in S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_M}$ tenemos que $Q(x) = \lambda_M$. Por lo tanto,

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M \quad \text{y} \quad \min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m,$$

y

$$S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_M} \subseteq \operatorname{argmax}_{\|x\|=1} Q(x) \quad \text{y} \quad S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_m} \subseteq \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} Q(x).$$

Si $x \in S_{n-1}$ y x tiene alguna componente no nula en algún autoespacio distinto de \mathbb{S}_{λ_M} , la identidad (2) implica que $Q(x) < \lambda_M$. Del mismo modo, si x tiene alguna componente no nula en algún autoespacio distinto de \mathbb{S}_{λ_m} , lo que ocurre es que $Q(x) > \lambda_m$. Por lo tanto,

$$S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_M} = \operatorname{argmax}_{\|x\|=1} Q(x) \quad \text{y} \quad S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_m} = \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} Q(x).$$

Lo que completa la demostración. \square

Nota técnica. *Técnica para describir la intersección entre un subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^n y la esfera de radio $\rho > 0$ centrada en el origen: $S(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \rho\}$. Se construye una base ortonormal de \mathbb{S} , $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\}$. Los vectores de \mathbb{S} se expresan como combinaciones lineales de los vectores de la base \mathcal{U} , $x = \sum_{j=1}^m \xi_j u_j$. Utilizando el Teorema de Pitágoras se obtiene que $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m \xi_j^2$. Decir que $\|x\| = \rho$ es lo mismo que decir que $\|x\|^2 = \rho^2$. Por lo tanto,*

$$S(\rho) \cap \mathbb{S} = \left\{ \sum_{j=1}^m \xi_j u_j : \sum_{j=1}^m \xi_j^2 = \rho^2 \right\}.$$

2. EXTREMOS SOBRE ELIPSOIDES

Queremos resolver el problema de máximos y mínimos de una forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$, con $A \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{R})$, sujetos a una restricción de la forma $R(x) = \rho^2$, donde $R(x) = x^T B x$, con $B \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{R})$ una matriz definida positiva y $\rho > 0$. En otras palabras, se trata de hallar los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática Q restringida al elipsoide $\mathcal{N}_{\rho^2}(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : R(x) = \rho^2\}$ y los vectores del elipsoide que los realizan.

En lo que sigue mostraremos que este problema se puede reducir al problema de máximos y mínimos de una forma cuadrática restringida a la esfera de radio ρ .

Paso 1. *Transformar el elipsoide $\mathcal{N}_{\rho^2}(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : R(x) = \rho^2\}$ en una esfera de radio ρ . Esto se consigue mediante un cambio de variables de la forma $x = M y$ que se construye de la siguiente manera:*

1. Representar la forma cuadrática definida positiva, R , en la forma $R(x) = x^T B x$, con $B \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{R})$.
2. Diagonalizar ortogonalmente la matriz B , $B = P \Lambda P^T$, donde P es una matriz ortogonal y $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal con elementos positivos en la diagonal.
3. Definir

$$(5) \quad M = P \Lambda^{-1/2} P^T,$$

donde $\Lambda^{-1/2} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right)$.

Nótese que M es una matriz simétrica e inversible tal que $MBM = I$. Por construcción, el cambio de variables $x = My$ permite expresar a la forma cuadrática $R(x) = x^T Bx$ en su forma canónica $\tilde{R}(y) = R(My) = \|y\|^2$.

Paso 2. *Cambio de variables.* El efecto que tiene el cambio de variables $x = My$ sobre la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$, es el siguiente:

$$\tilde{Q}(y) = Q(My) = y^T \tilde{A}y,$$

donde $\tilde{A} = MAM$.

Extremos. El Teorema de Rayleigh nos informa que

1. $\max_{\|y\|=\rho} \tilde{Q}(y) = \tilde{\lambda}_M \rho^2$ y $\text{argmax}_{\|y\|=\rho} \tilde{Q}(y) = S(\rho) \cap \text{nul}(\tilde{A} - \tilde{\lambda}_M I)$,
2. $\min_{\|y\|=\rho} \tilde{Q}(y) = \tilde{\lambda}_m \rho^2$ y $\text{argmin}_{\|y\|=\rho} \tilde{Q}(y) = S(\rho) \cap \text{nul}(\tilde{A} - \tilde{\lambda}_m I)$,

donde $\tilde{\lambda}_M = \max \sigma(\tilde{A})$, $\tilde{\lambda}_m = \min \sigma(\tilde{A})$ y $S(\rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = \rho\}$.

Cálculo. En la práctica, se requerirá que calculemos el espectro de \tilde{A} , lo que nos conducirá al problema de hallar las raíces del polinomio característico de la matriz \tilde{A} ,

$$\chi(x) = \det(\tilde{A} - xI).$$

Factorizando los términos involucrados y utilizando las propiedades del determinante podemos ver que

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \det(\tilde{A} - xI) \\ &= \det(MAM - xMBM) \\ &= \det(M(A - xB)M) \\ &= \det(M) \det(A - xB) \det(M) \\ &= \det(B^{-1}) \det(B(B^{-1}A - xI)) \\ &= \det(B^{-1}) \det(B) \det(B^{-1}A - xI) \\ &= \det(B^{-1}A - xI). \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(B^{-1}A).$$

Que pone el asunto *en función de los datos originales del problema, que son las matrices A y B .*

Quedaría por resolver el asunto de los autoespacios de \tilde{A} que son los que informan donde se realizan los extremos de $\tilde{Q}(y)$ sujetos a la restricción $\|y\| = \rho$.

Veamos las cosas más de cerca. Decir que $y \in \text{nul}(\tilde{A} - \lambda I)$ significa que $\tilde{A}y = \lambda y$. Recordando que $x = My$ tenemos que

$$MAMy = \lambda M^{-1}My \iff MAx = \lambda M^{-1}x \iff M^2Ax = \lambda x \iff B^{-1}Ax = \lambda x.$$

2.1. Teorema de Rayleigh: extremos sobre elipsoides.

Resumiendo, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Versión general del Teorema de Rayleigh). *Sea $Q(x) = x^T A x$, con $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$, una forma cuadrática cualquiera y sea $R(x) = x^T B x$, con $B \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$, una forma cuadrática definida positiva. Vale que:*

$$\max_{R(x)=\rho^2} Q(x) = \lambda_M \rho^2 \quad \text{y} \quad \operatorname{argmax}_{R(x)=\rho^2} Q(x) = \mathcal{N}_{\rho^2}(R) \cap \operatorname{nul}(B^{-1}A - \lambda_M I),$$

$$\min_{R(x)=\rho^2} Q(x) = \lambda_m \rho^2 \quad \text{y} \quad \operatorname{argmin}_{R(x)=\rho^2} Q(x) = \mathcal{N}_{\rho^2}(R) \cap \operatorname{nul}(B^{-1}A - \lambda_m I),$$

donde $\lambda_M = \max \sigma(B^{-1}A)$, $\lambda_m = \min \sigma(B^{-1}A)$ y $\mathcal{N}_{\rho^2}(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : R(x) = \rho^2\}$.