

Puntaje total de cada ejercicio:

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Ej. 5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

FACULTAD DE INGENIERÍA-UBA
ÁLGEBRA II. Primer cuatrimestre del 2019
15 de junio de 2019

TEMA 1

Apellido y nombres:

Número de padrón:

Curso

Justifique todas las respuestas .

Los razonamientos que utilice para resolver cada ejercicio deben constar en el escrito.

Numere las hojas y firme al final del examen.

El examen se aprueba con 55 puntos o más. No se asignará una fracción del puntaje asignado a un ejercicio o ítem.

1. Considere a $V = \mathcal{P}_2$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Se define $(a_0 + b_0t + c_0t^2, a_1 + b_1t + c_1t^2) = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1$.
 - a) (5 puntos) Demuestre que (\cdot, \cdot) es un producto interno en V .
 - b) (5 puntos) Demuestre que $B = \{1, t, t^2\}$ es una base ortonormal de V .
 - c) (10 puntos) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $T(a + bt + ct^2) = a$. ¿Es T una proyección ortogonal?
2. (20 puntos) Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Siendo $\mathcal{S} = \text{gen}\{1, t - \frac{1}{2}\}$ un subespacio de V , y $v(t) = t^2 + t + 1$ un elemento de V , calcule $d(v, \mathcal{S})$.
3. Dado $V = \mathbb{R}^3$ y $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de V .
 - a) (5 puntos) Demuestre que $B_2 = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2 + v_3, v_1 - v_2 - 2v_3\}$ es una base ortogonal de V , y halle $C_{B_2B_1}$.
 - b) (5 puntos) Sea $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$ y $T_1 : V \rightarrow V$ la reflexión respecto del plano \mathcal{S} , halle $[T_1]_{B_1}$ y $[T_1]_{B_2B_1}$.
 - c) (10 puntos) Sea $\mathcal{T} = \text{gen}\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ y $T_2 : V \rightarrow V$ la reflexión respecto del plano \mathcal{T} . Demuestre que $[T_2 \circ T_1]_B = I$ para toda base B de V .
4. Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Dado $y \in W$ se tiene el siguiente conjunto:
$$\mathcal{S} = \{x \in V : T(x) = y\}$$
 - a) (15 puntos) Demuestre que, si $y = 0$ entonces \mathcal{S} es un subespacio de V .
 - b) (10 puntos) Demuestre que, si $y \neq 0$ entonces \mathcal{S} no es un subespacio de V .
5. Utilizando el producto interno canónico.
 - a) (10 puntos) Demuestre que, dados los puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, la recta que mejor se ajusta a ellos es única si y sólo si por lo menos dos de los puntos tienen abscisas diferentes.
 - b) (5 puntos) Halle la recta que ajusta mejor a los siguientes puntos: $(0, 1), (1, 1), (3, 2)$. Grafique la solución y los puntos dados.