① Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique

$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad A^2 x = x \quad , \quad A \neq \pm I$

$S = gen\{(1\,0\,1)^t, (0\,1\,0)^t\}$ es A- invariante.

¿Es única? De no ser única, exhibir dos distintas.

$$A^2 x = x \Rightarrow (A^2 - I)\,x = 0 \quad \forall x \Rightarrow A^2 - I = 0$$

Con $p(t) = t^2 - 1$ es $p(A) = A^2 - I = 0$

Si λ es autovalor de A: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \lor \lambda = -1$

- Una posibilidad es que A represente la reflexión con respecto a S.

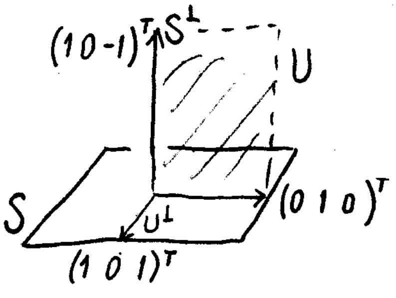
$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \;;\quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;;\quad \text{como } S^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} : \; A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

- Otra es que A represente la reflexión con respecto a $U = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$



$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = A\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

② Decidir si las siguientes afirmaciones son V ó F.
En caso de ser verdaderas, demostrar; de ser falsas, exhibir un contraejemplo

a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida negativa, entonces los valores singulares son los opuestos de los autovalores.

Ⓥ A es una matriz simétrica con todos los autovalores negativos. Luego se diagonaliza ortogonalmente:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n \end{pmatrix} P^T \qquad \text{con } P.P^T = I \ \wedge \ \lambda_i > 0 \ (i = 1 \dots n)$$

$$\Rightarrow A^T A = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^T \quad \Rightarrow \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i| = \lambda_i$$

---

b) Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las matrices A y A^{+} tienen igual rango.

Ⓥ Una DVS reducida de A con rango r es

$$A = \underset{m\times r}{U_r} \cdot \underset{D \in \mathbb{R}^{r\times r}}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}} \cdot \underset{r\times n}{V_r^T} \qquad \sigma_i \neq 0 \quad (i = 1 \dots r)$$

$$A^{+} = \underset{n\times r}{V_r} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_r \end{pmatrix} \cdot \underset{r\times m}{U_r^T}$$

. A^{+} tiene (aunque no estén en orden decreciente) r valores singulares no nulos.

③ Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

a) Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ para que exista B base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de la matriz.

b) Considerando $a = 1/2$ y $b = 1/8$ hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que verifiquen

$$A^n v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

---

a) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 1 & a-\lambda & b \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - b\right] - b(a-\lambda)$

$= (a-\lambda)\cdot\left[(a-\lambda)^2 - 2b\right] = -(\lambda-a)\left[(\lambda-a)^2 - 2b\right]$

$\Rightarrow$ un autovalor es $\lambda = a \in \mathbb{R}$

Si $(\lambda-a)^2 - 2b = 0 \Rightarrow (\lambda-a)^2 = 2b \Rightarrow$ debe ser $b \geq 0$

- Si $b>0$ $\quad \lambda - a = \pm\sqrt{2b} \Rightarrow \lambda = a \pm \sqrt{2b}$ $\quad$ tres autovalores reales $\neq$ A es diagonalizable

- Si $b=0$ $\quad \lambda = a$ autovalor de multiplicidad algebraica 3 y geométrica 1

b) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ los autovalores son $\lambda = 1/2$, $\lambda = 1/2 \pm \sqrt{1/4} = \frac{1}{2} \pm 1/2$

$S_1 = \text{gen}\left\{(1/8 \;\; 1/2 \;\; 1)^t\right\} = \text{gen}\left\{\underbrace{(1 \;\; 4 \;\; 8)^t}_{v_1}\right\}$ $\qquad S_{1/2} = \text{gen}\left\{(-1/8 \;\; 0 \;\; 1)^t\right\} = \text{gen}\left\{\underbrace{(-1 \;\; 0 \;\; 8)^t}_{v_2}\right\}$ $\qquad S_0 = \text{gen}\left\{(1/8 \;\; -1/2 \;\; 1)^t\right\} = \text{gen}\left\{\underbrace{(1 \;\; -4 \;\; 8)^t}_{v_3}\right\}$

Dado $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$: $\quad Av = \alpha v_1 + \beta \frac{1}{2} v_2$

$\Rightarrow \quad A^n v = \alpha v_1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n v_2 = v_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

debe ser $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

④ a) Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal con determinante 1 y n impar. Probar que existe $v \neq 0$ / $Mv = v$.

$MM^T = M^TM = I$

Hay que probar que 1 es autovalor. Es decir que $\det(M-I) = 0$

Ahora bien, $\det(M-I) = \det(M - MM^T) = \det[M(I-M^T)]$

$= \det M \cdot \det(I-M^T) = 1 \cdot \det(I-M^T)^T$

$= \det(I-M) \underset{(n \text{ impar})}{=} -\det(M-I)$

$\therefore \quad 2\det(M-I) = 0$ ✓

---

b) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y verifica que

$3\|x\|^2 \leq x^T(A+2I)x \leq 5\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

entonces los autovalores de A^{-1} pertenecen al intervalo $[1/3, 1]$

Los autovalores de $A+2I$ están entre 3 y 5.

$p(t) = 2+t \Rightarrow p(A) = 2I + A$.

Si λ es autovalor de $A \Rightarrow 3 \leq \overbrace{p(\lambda) = 2+\lambda}^{\text{autovalor de } 2I+A} \leq 5$

$\Rightarrow \underbrace{1 \leq \lambda \leq 3}_{A \text{ es inversible}} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{3}$

Los autovalores de A^{-1} son de la forma $1/\lambda$.

⑤ Sean $T: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $S: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ las t.l. dadas por

$$T(f) = f' + bf \qquad S(f) = f' + cf$$

con $b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinar las condiciones sobre b, c para que sea
$$Nu(S \circ T) = \text{gen}\{\operatorname{senh}(x), \cosh(x)\}$$

b) Considerando $b=1$ y $c=-1$ hallar todas las funciones $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}) /$ $(S \circ T)(g) = 4e^{kx}$. Estudiar para todos los posibles valores de $k \in \mathbb{R}$.

---

a) $$(S \circ T)(f) = S[T(f)] = S[f' + bf] = f'' + bf' + cf' + bcf$$

$$Nu(S \circ T) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : f'' + (b+c)f' + bcf = 0\}$$

$$\text{gen}\{\operatorname{senh}(x), \cosh(x)\} = \text{gen}\{e^{x}, e^{-x}\}$$

$\therefore$ Las raíces de la ecuación característica deben ser 1 y -1.

es decir $r^2 + (b+c)r + bc = (r+1)(r-1) = r^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad b+c = 0 \Rightarrow c = -b$$
$$bc = -1 \Rightarrow -b^2 = -1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \wedge c = \mp 1$$

---

b) $(S \circ T)(g) = 4e^{kx} \Leftrightarrow g'' - g = 4e^{kx}$.

La solución general es $g(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + g_{part}$.

- <u>Si $k \neq \pm 1$</u> : $g_{part}(x) = Ce^{kx} \Rightarrow g'' - g = k^2Ce^{kx} - Ce^{kx} = 4e^{kx}$

$$\Rightarrow C(k^2 - 1) = 4 \Rightarrow g_{part}(x) = \frac{4}{k^2-1}e^{kx}$$

- <u>Si $k = 1$</u> : $g_{part}(x) = 2xe^{x}$

- <u>Si $k = -1$</u> : $g_{part}(x) = -2xe^{-x}$