Álgebra 2. Parcial 26/10/19. Tema 1

① Sean $S_1 \subset \mathcal{P}_2$, $S_2 \subset \mathcal{P}_2$ los subespacios definidos por

$$S_1 = \{ p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0 \} \qquad S_2 = \text{gen}\{ t^2 - t,\ t+1 \}$$

1. Probar que $S_1 + S_2 = \mathcal{P}_2$
2. Demostrar que la suma $S_1 + S_2$ no es directa.

---

1. Sea $p(t) = at^2 + bt + c$: $p \in S_1 \Leftrightarrow p(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

$\Leftrightarrow p(t) = at^2 + bt$

Por lo tanto $S_1 = \text{gen}\{ t^2, t \}$

y entonces $S_1 + S_2 = \text{gen}\{ t^2, t, \underbrace{t^2 - t}_{\text{es c.l. de los dos anteriores}}, t+1 \} = \text{gen}\{ t^2, t, t+1 \}$

Los vectores $t^2, t, t+1$ son l.i. Puede probarse, por ejemplo, tomando coordenadas con respecto a la base canónica $\{ t^2, t, 1 \}$ y viendo que las coordenadas son l.i. Entonces

$$\dim S_1 + S_2 = 3 \quad \wedge \quad S_1 + S_2 \subset \mathcal{P}_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 + S_2 = \mathcal{P}_2$$

2. En el caso de dos subespacios S_1 y S_2, la suma es directa si y sólo si $S_1 \cap S_2 = \{ \vec{0} \}$. Pero en este caso $t^2 - t \in S_1 \cap S_2$

↳ Una alternativa es considerar que $\mathcal{P}_2 = S_1 + S_2$ y por ende

$$\dim \mathcal{P}_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$
$$3 = 2 + 2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

con lo cual $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 0$

② Sea $f: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

con $B = \{1+t+t^2,\ 1-t,\ 1\}$ y $B' = \{(1\ 0\ 1)^t,\ (0\ 1\ 1)^t,\ (1\ 0\ 2)^t\}$

1. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales f es un isomorfismo.
2. Para $\alpha = -1$, hallar una base de $Nu(f)$.
3. Para $\alpha = -1$, hallar todos los $p \in \mathcal{P}_2$ tal que $f(p) = (2\ 2\ 5)^t$

---

1. Dado que $\underbrace{\dim \mathcal{P}_2}_{3} = \dim Nu(f) + \dim Im(f)$

alcanza con probar que $\dim Nu(f) = 0$, porque en tal caso f es un monomorfismo y $\dim Im(f) = 3$, con lo cual $Im(f) = \mathcal{P}_2$ y f es también un epimorfismo.

Para probar que $\dim Nu(f) = 0$, el único vector de $\mathcal{P}_2$ que se transforma en $(0\ 0\ 0)^t$ debe ser el nulo. Vale decir que considerando coordenadas con respecto a dos bases (cualesquiera) el sistema homogéneo

$$[f]_{BB'}\ [x]_B = (0\ 0\ 0)^t$$

debe ser compatible determinado. En resumen,

$$\det [f]_{BB'} \neq 0$$

con lo cual se llega a

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = (\alpha+1)(\alpha-2) \neq 0 \qquad \boxed{\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}}$$

2. Si $\alpha = -1$ queda

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y en tal caso es

$$\text{Nul } [f]_{BB'} = \text{gen}\left\{(-2 \;\; 1 \;\; 1)^t\right\}$$

Estas son las coordenadas con respecto a la base B de aquellos vectores de $\mathcal{P}_2$ que se transforman en $0_{\mathbb{R}^3}$. Entonces

$$\text{Nu}(f) = \text{gen}\left\{ -2\cdot(1+t+t^2) + 1\cdot(1-t) + 1\cdot 1\right\} = \text{gen}\left\{-3t-2t^2\right\}$$

La base buscada es $\boxed{\{-3t-2t^2\}}$

3. Se plantea un sistema de ecuaciones teniendo en cuenta las coordenadas:

$$[f]_{BB'}\,[p]_B = \left[(2 \;\; 2 \;\; 5)^t\right]_{B'}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [p]_B = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in B$$

$$\Rightarrow p(t) = \lambda\left(-2(1+t+t^2) + 1\cdot(1-t) + 1\cdot 1\right) + \left(1\,(1+t+t^2) + 1\cdot(1-t) + (-1)\cdot 1\right)$$

$$p(t) = \lambda\left(-3t-2t^2\right) + 1 + t^2$$

$$\boxed{p \in \left\{1 + t^2 + \lambda\left(-3t-2t^2\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

③ Sea $S \subset \mathcal{P}_2$ el subespacio definido por $S = \text{gen}\{t, t^2-1\}$.

Considerando el producto interno $(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

1. Hallar $S^\perp$.
2. Halle la transformación lineal que a un polinomio $p \in \mathcal{P}_2$ le asigna su proyección ortogonal sobre S.

---

1. $S^\perp = \{ p \in \mathcal{P}_2 : \forall q \in S : (p,q) = 0 \}$.

Dado que los elementos de S son de la forma $\alpha \cdot t + \beta(t^2-1)$, $S^\perp$ está formado por aquellos $p \in \mathcal{P}_2 : (p,t) = (p, t^2-1) = 0$.

Planteando un $p \in \mathcal{P}_2$ genérico $p(t) = at^2 + bt + c$:

$$(at^2+bt+c, t) = 0 \iff a\underbrace{(t^2,t)}_{0} + b\underbrace{(t,t)}_{2/3} + c\underbrace{(1,t)}_{0} = 0 \iff b = 0$$

$$(at^2+bt+c, t^2-1) = 0 \iff a\underbrace{(t^2, t^2-1)}_{-4/15} + b\underbrace{(t, t^2-1)}_{0} + c\underbrace{(1, t^2-1)}_{-4/3} = 0$$

$$\iff -\frac{\cancel{4}}{15}a - \frac{\cancel{4}}{3}c = 0 \iff a + 5c = 0 \iff a = -5c$$

$\therefore$ Los elementos de $S^\perp$ son de la forma $p(t) = -5ct^2 + c = c(-5t^2+1)$ $(c \in \mathbb{R})$

$$S^\perp = \text{gen}\{-5t^2+1\}$$

2. Dado que $\dim S^\perp < \dim S$, conviene proyectar sobre $S^\perp$ para luego usar que $p = P_S p + P_{S^\perp} p \Rightarrow P_S p = p - P_{S^\perp} p$.

Dado que $\{-5t^2+1\}$ es una base ortogonal de $S^\perp$, considerando un polinomio genérico como antes se tiene

$$P_{S^\perp}(at^2+bt+c) = \frac{(at^2+bt+c, -5t^2+1)}{(-5t^2+1, -5t^2+1)} \cdot (-5t^2+1) = \frac{-\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}c}{\frac{16}{3}}(-5t^2+1)$$

$$= -\frac{1}{4}(a+c)(-5t^2+1) = \frac{5}{4}(a+c)t^2 - \frac{1}{4}(a+c)$$

$$\Rightarrow P_S(at^2+bt+c) = at^2+bt+c - \left(\frac{5}{4}(a+c)t^2 - \frac{1}{4}(a+c)\right) = \left(-\frac{1}{4}a - \frac{5}{4}c\right)t^2 + bt + \frac{1}{4}a + \frac{5}{4}c$$

④ Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$- espacio vectorial con base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$

1. Probar que $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$
2. Calcular la distancia de $v = 3v_1 - 3v_2 - v_3$ a $S = \text{gen}\{v_1+v_2-v_3, v_3\}$

---

1. Se calculan los productos internos de los elementos de la base teniendo en cuenta que la primera base es ortonormal.

$$(v_1+v_2, v_1-v_2) = (v_1,v_1) - (v_1,v_2) + (v_2,v_1) - (v_2,v_2) = 1-0+0-1 = 0 \checkmark$$

$$(v_1+v_2, v_3) = (v_1,v_3) + (v_2,v_3) = 0+0 = 0 \checkmark$$

$$(v_1-v_2, v_3) = (v_1,v_3) - (v_2,v_3) = 0-0 = 0 \checkmark$$

↳ Son tres vectores no nulos y ortogonales. Luego son linealmente independientes y forman una base del espacio de dimensión 3.

2. $d(v,S) = \|v - P_S v\| = \|P_{S^\perp} v\|$

Para calcular $S^\perp$ se plantea un vector genérico $w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ tal que

$$(w, v_1+v_2-v_3) = 0 \iff \alpha(v_1,v_1) + \beta(v_2,v_2) - \gamma(v_3,v_3) = 0 \iff \alpha+\beta-\gamma = 0$$

$$(w, v_3) = 0 \iff \gamma(v_3,v_3) = 0 \iff \gamma = 0$$

Con lo cual $\alpha+\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$ y el vecto genérico de $S^\perp$ es

$$w = \alpha v_1 - \alpha v_2 \Rightarrow S^\perp = \text{gen}\{v_1 - v_2\}.$$

Ya tenemos una base ortogonal de $S^\perp$ y podemos proyectar v:

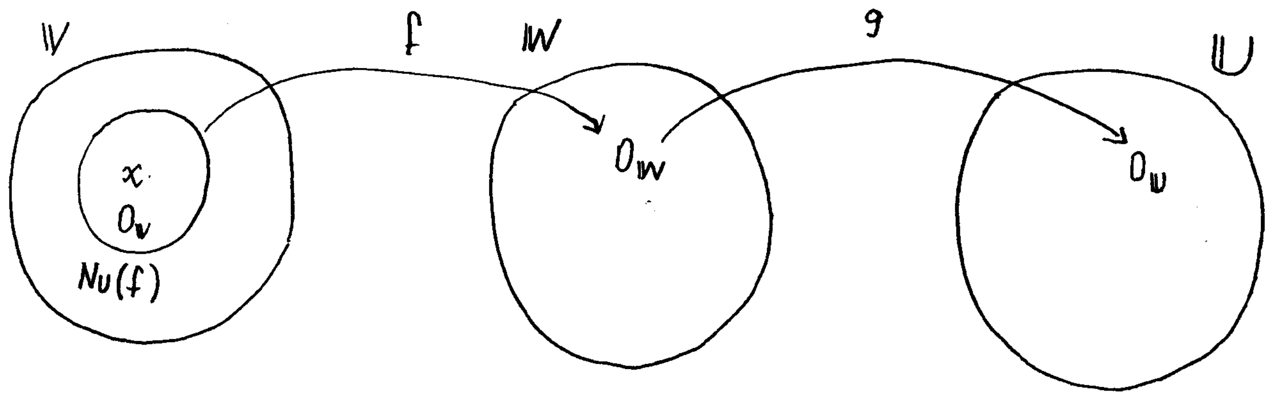
$$P_{S^\perp} v = \frac{(v, v_1-v_2)}{(v_1-v_2, v_1-v_2)}(v_1-v_2) = \frac{3(v_1,v_1)+3(v_2,v_2)}{(v_1,v_1)+(v_2,v_2)}(v_1-v_2) = 3(v_1-v_2)$$
$$= 3v_1 - 3v_2$$

$$\Rightarrow d(v,S) = \sqrt{(3v_1-3v_2, 3v_1-3v_2)} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

⑤ Sean $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g: \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ dos transformaciones lineales

1. Demostrar que $Nu(f) \subseteq Nu(g \circ f)$.
2. Demostrar que, si g es un monomorfismo, entonces $Nu(f) = Nu(g \circ f)$.

1.



Sea $x \in Nu(f) \Rightarrow f(x) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow g[f(x)] = g(0_{\mathbb{W}}) = 0_{\mathbb{U}}$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0_{\mathbb{U}} \Rightarrow x \in Nu(g \circ f)$

Esto prueba la inclusión $Nu(f) \subseteq Nu(g \circ f)$

2. Falta probar la otra inclusión:

Sea $x \in Nu(g \circ f) \Rightarrow (g \circ f)(x) = 0_{\mathbb{U}} \Rightarrow g[f(x)] = 0_{\mathbb{U}}$

$\Rightarrow f(x) \in Nu(g) = \{0_{\mathbb{W}}\} \Rightarrow f(x) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow x \in Nu(f)$

porque g es monomorfismo

Por lo tanto $Nu(g \circ f) \subseteq Nu(f)$

Junto con la inclusión anterior prueba que $Nu(g \circ f) = Nu(f)$