

SEGUNDO PARCIAL - Curso ESP 4 de diciembre de 2019

Apellido y nombre:

Número de padrón:

Justifique todas sus respuestas. Debe aclarar cantidad de hojas entregadas y firmar el parcial al pie. El examen se aprueba sumando 55 puntos.

Ejercicio 1 Sea $A \in R^{3 \times 3}$ una matriz que verifica:

- i. $A = A^T$
- ii. $I = A^2$

iii. $\mu = -1$ es un autovalor de A con autoespacio asociado: $\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para la forma cuadrática $Q(x) = x^T(3I - A)x$ encontrar los extremos sujeta a la restricción $\|x\| = 2$, indicando todos los puntos en que se alcanzan dichos extremos. **(20 puntos)**

Ejercicio 2 La matriz $A \in R^{3 \times 3}$ es la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre un subespacio S (con respecto a la base canónica). Sabiendo que $\text{Nul}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, resolver el siguiente problema de valor inicial: **(15 puntos)**

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = (1 \ 1 \ 1)^T \end{cases}$$

Ejercicio 3 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

a) Calcular el máximo y mínimo de $\|Ax\|$ sujeta a $\|x\| = 1$ y los puntos donde se alcanzan dichos extremos. **(10 puntos)**

b) Probar que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible para cualquier $b \in R^2$ y encontrar la solución de norma mínima de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **(10 puntos)**

Ejercicio 4

a) Sea $A \in C^{n \times n}$ una matriz cuyo polinomio característico es $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ con $a_{n-1}, \dots, a_0 \in C$. Probar que si $a_0 \neq 0$, entonces A es invertible. **(15 puntos)**

b) Sea $T: C^n \rightarrow C^n: T(x) = Mx$ con M unitaria. Se considera el producto interno canónico.

Probar que S subespacio invariante por $T \Rightarrow T(S) = S \wedge T(S^\perp) = S^\perp$ **(15 puntos)**

Ejercicio 5 Decidir si existe una matriz $A \in R^{3 \times 3}$ simétrica que verifique simultáneamente:

- i) $A^3 - 3A^2 - A + 3I$ sea singular
 - ii) A es definida negativa
 - iii) $\det(A) = -2$
 - iv) $\text{tr}(A) = -4$
 - v) $S = \{x \in R^3: x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ sea A -invariante.
- En caso de existir más de una, exhibir dos. **(15 puntos)**

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz que verifica

(i) $A^T = A$

(ii) $A^2 = I$

(iii) $\lambda = -1$ es un autovalor con autoespacio asociado $S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ (1 \ 0 \ 1)^t \right\}$

Para la forma cuadrática $Q(x) = x^T (3I - A) x$ encontrar los extremos que realiza sujeta a la restricción $\|x\| = 2$. Indicar todos los puntos en que se alcanzan dichos extremos.

A es la matriz asociada a una reflexión. Los autovalores son 1 y -1:

$$Av = \lambda v \Rightarrow A(Av) = A(\lambda v) \Rightarrow \underbrace{A^2}_I v = \underbrace{\lambda A}_{\lambda v} v \Rightarrow v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $B = 3I - A$ es $p(A)$ donde $p(t) = 3 - t$. $\hookrightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Sus autovalores son $p(-1) = 4$ y $p(1) = 2$, con autoespacios asociados

$$S_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\max_{\|x\|=2} Q(x) = 4 \cdot 2^2 = 16 \quad \text{y se alcanza en } \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\min_{\|x\|=2} Q(x) = 2 \cdot 2^2 = 8 \quad \text{y se alcanza en } \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 2^2$$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre un subespacio S (con respecto a la base canónica). Sabiendo que $\text{Nul } A = \text{gen} \{ (1 \ 2 \ 1)^t \}$, resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = (1 \ 1 \ 1)^t \end{cases}$$

Por ser una matriz de proyección, los autoespacios de A son

$$S_0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

↳ La solución general de $X(t)$ es

$$X(t) = C_1 \cdot e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 2C_3 = 1 \\ 2C_1 - C_3 = 1 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$$

de donde $C_1 = 2/3$, $C_2 = -1/3$, $C_3 = 1/3$

$$X(t) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 + 1/3 e^t \\ 4/3 - 1/3 e^t \\ 2/3 + 1/3 e^t \end{pmatrix}$$

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Calcular $\max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ y $\min_{\|x\|=1} \|Ax\|$ y los puntos en que se alcanzan dichos extremos.

b) Probar que el sistema de ecuaciones $A \cdot x = b$ es compatible para cualquier $b \in \mathbb{R}^2$ y encontrar la solución de norma mínima de

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U_r} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T}_{V_r^T} \quad \text{DVS reducida} \quad \hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = 4$ y se alcanza en $x = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0$ y se alcanza en $x = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\text{Col } A = \mathbb{R}^2 \Rightarrow Ax = b$ es compatible $\forall b \in \mathbb{R}^2$.

$$A^+ = V_r D^{-1} U_r^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 0 & 0 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^+ = A^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

a) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz cuyo polinomio característico es

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

con $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$. Probar que si $a_0 \neq 0$, entonces A es invertible

A es singular (no invertible) $\Leftrightarrow 0$ es autovalor de A .

Los autovalores de A son las raíces de $p(t)$. Como $p(0) = a_0 \neq 0$, entonces 0 no es autovalor de A y A resulta invertible

b) Sea $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: T(x) = Mx$ con M unitaria. Probar que

$$S \text{ subespacio invariante por } T \Rightarrow T(S) = S \wedge T(S^\perp) = S^\perp$$

T es una t.l. biyectiva: isomorfismo.

Luego para cualquier subespacio S : $\dim S = \dim T(S)$.

Si además S es T -invariante $T(S) \subseteq S$. Como $\dim T(S) = \dim S$, resulta $T(S) = S$.

$$\text{Sea } x \in S^\perp \Leftrightarrow \forall s \in S: (x, s) = 0.$$

Se quiere probar que $T(x) \in S^\perp$. Entonces, dado $s \in S: \exists \tilde{s} \in S / T(\tilde{s}) = s$.

$$(T(x), s) = (T(x), T(\tilde{s})) = (Mx, M\tilde{s}) = (Mx)^T \cdot \overline{(M\tilde{s})}$$

$$= x^T M^T \bar{M} \tilde{s} = (x^T M^T \bar{M} \tilde{s})^T$$

$$= \tilde{s}^T \underbrace{\bar{M}^T M}_I x = \tilde{s}^T x = 0$$

Luego $T(S^\perp) \subseteq S^\perp$ y como $\dim S^\perp = \dim T(S^\perp)$, sigue la igualdad.

Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifique simultáneamente

- (i) $A^T = A$
- (ii) $A^3 - 3A^2 - A + 3I$ es singular (no inversible).
- (iii) A es definida negativa.
- (iv) $\text{tr } A = -4$, $\det A = -2$.
- (v) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ es A -invariante.

En caso de existir más de una, exhibir dos.

$$p(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3 \Rightarrow p(A) \text{ es singular: tiene un autovalor } 0.$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \text{ autovalor de } A / p(\lambda_1) = 0.$$

Dado que $p(t) = (t-1)(t+1)(t-3)$ y A es definida negativa, $\lambda_1 = -1$.

$$\text{tr } A = -1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = -3 \Rightarrow \lambda_2 + \frac{2}{\lambda_2} = -3 \Rightarrow \lambda_2^2 + 2 = -3\lambda_2$$

$$\det A = -1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -2 \Rightarrow \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2^2 + 3\lambda_2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -1 \quad \vee \quad \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \lambda_3 = -1$$

O sea que los autovalores son -1 (doble) y -2 (simple).

$$S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad S^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una posibilidad es que S sea el autoespacio asociado a -1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Otra es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$