Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz tal que
$\operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ y
$\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$.

Seleccione una:

- a. Si $b = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ es compatible. ✗
- b. Si $b = \begin{bmatrix}5 & 3 & 2\end{bmatrix}^T$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.
- c. Ninguna de las otras es correcta.
- ✔ d. Si $b = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.
- e. Si $b = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

a) $Ax = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \alpha = -1/8$$

$\alpha + 3\beta = 1 \qquad \alpha - 9\alpha = 1$

$2\alpha + 2\beta = -1$

$3\alpha + \beta = 0 \qquad \beta = -3\alpha$

$2\alpha - 6\alpha = -1 \qquad \alpha = 1/4$

El sistema es incompatible

$b \notin \operatorname{Col}(A) \Rightarrow$ Falso

Así puede hacerse con todos y ver que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Col}(A) \Rightarrow$$

d) Verd.

Sea B la base de $\mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$B = \{\overset{v_1}{1+x}, \overset{v_2}{1-x}, \overset{v_3}{2x^2+3x^3}, \overset{v_4}{3x+5x^2}\}$$

y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$ definida por

$T(1+x) = 3x^2 + 2x^3, \; = T(v_1)$

$T(1-x) = 5x + 3x^2, \; = T(v_2)$

$T(2x^2+3x^3) = 15x + 15x^2 + 4x^3, = T(v_3)$

$T(3x+5x^2) = 25x + 24x^2 + 6x^3. = T(v_4)$

Entonces:

Seleccione una:

a. Ninguna de las otras es correcta.

b. $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{gen}\{6x^3 + 19x^2 + 8x - 1, 9x^3 + 31x^2 + 16x - 1\}$.

c. $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{9x^2 + 21x + 4, 3x + 2\}$.

d. $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{gen}\{-3x^3 - 2x^2 - x + 5, -5x^2 - 5x + 8\}$. ✔

e. $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{3x + 2, 1\}$.

Veamos si (d) es Verd

$$-3x^3 - 2x^2 - x + 5 = -(3x^3 + 2x^2) - x + 5 =$$
$$= -v_3 + 5 - x = -v_3 + 2(1+x) + 3(1-x) =$$
$$= -v_3 + 2v_1 + 3v_2$$

$$T(-v_3 + 2v_1 + 3v_2) =$$
$$= -15x - 15x^2 - 4x^3 + 2(3x^2 + 2x^3) +$$
$$+ 3(5x + 3x^2) = 0$$

$$-5x^2 - 5x + 8 = -(5x^2 + 3x) +$$
$$+ 3(1+x) + 5(1-x) =$$
$$= -v_4 + 3v_1 + 5v_2$$

$$T(-v_4 + 3v_1 + 5v_2) =$$
$$= -25x - 24x^2 - 6x^3 + 3(3x^2 + 2x^3) +$$
$$+ 5(5x + 3x^2) = 0$$