

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora
Duración: 90 minutos.

Segundo cuatrimestre – 2020
17/III/21 – 13:00 hs.

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$ y calcular la distancia del vector $[3 \ 3 \ 1]^T$ al subespacio \mathbb{S} .

2. Sea A la matriz, respecto de la base canónica, de la simetría de \mathbb{R}^3 con respecto al plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $[1 \ 1 \ 1]^T$. Hallar la solución del problema de valores iniciales $Y' = AY$, $Y(0) = [1 \ 0 \ 1]^T$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Caracterizar geoméricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz simétrica que satisface las siguientes propiedades: $\text{rango}(A + I) = 1$, $\det(A) = -4$, y el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A . Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ de norma 3 que maximizan la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$.