

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 3 \cos(4t)$ tal que $y(0) = 9$, $y'(0) = 0$.

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A \neq I$ y $A^3 = I$. ¿Es única? Si la respuesta es afirmativa explicar por qué, sino hallar otra.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz en base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el subespacio

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = [1 \ 0 \ 1]^T$ y determinar la de norma mínima.

4. Sea Q la forma cuadrática en \mathbb{R}^3 definida por $Q(x) = 4\|x\|^2 - 2\|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2$, donde $P_{\mathbb{S}}$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$. Hallar el valor máximo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $\|x\| = 2$ y determinar los vectores que lo realizan.

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 3 \cos(4t)$ tal que $y(0) = 9$, $y'(0) = 0$.

$$y'' + 16y = 3 \cos(4t)$$

EDO No homogénea

$$y = y_H + y_P$$

Ecuación Homogénea

$$y'' + 16y = 0$$

Polinomio
característico

$$y'' \rightarrow P^2 \quad ; \quad y' \rightarrow P \quad ; \quad y \rightarrow 1$$

$$P^2 + 16 \cdot 1 = 0$$
$$P = \pm \sqrt{-16}$$

$$P = \pm 4i$$

$$y_H = C_1 e^{4i} + C_2 e^{-4i}$$

$$y_H = C_1 e^{4it} + C_2 e^{-4it}$$

$$y_H = C_1 (\cos(4t) + i \sin(4t)) + C_2 (\cos(-4t) + i \sin(-4t))$$

$$y_H = C_1 \cdot \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$$

Solución particular

$$y'' + 16y = 3 \cos(4t)$$

Proponemos solución

$$y(t) = A \cdot T \cdot \cos(4t) + B \cdot T \cdot \sin(4t)$$

llamo $m(t)$

$$y(t) = t \cdot m$$

$$y'(t) = 1 \cdot m + t \cdot m'$$

$$y''(t) = m' + 1 \cdot m' + t \cdot m''$$

$$y(t) = T \cdot M$$

$$y''(t) = 2M' + TM''$$

$$y'' + 16y = 3 \cos(4t)$$

reemplazo

$$2M' + TM'' + 16TM = 3 \cos(4t)$$

igualar coeficientes (despejar A y B)

(...)

$$A = 0, B = \frac{3}{8}$$

$$y(t) = \cancel{A \cdot T \cdot \cos(4t)} + B T \sin(4t)$$

$$y_p(t) = \frac{3}{8} T \sin(4t)$$

$$y = y_H + y_p$$

$$y = C_1 \cdot \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{3}{8} T \sin(x)$$

$$y(0) = 9, y'(0) = 0$$

$$y' = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x) + \frac{3}{8} (1 \cdot \cos(x) + x \sin(x))$$

$$y(0) = 9;$$

$$y(0) = C_1 = 9$$

$$y'(0) = 4C_2 = 0$$

$$C_1 = 9$$

$$C_2 = 0$$

$$\therefore y(x) = 9 \cos(4x) + \frac{3}{8} T \sin(x)$$

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A \neq I$ y $A^3 = I$. ¿Es única? Si la respuesta es afirmativa explicar por qué, sino hallar otra.

$$P(T) = T^3 \Rightarrow P(A) = A^3$$

$$A^3 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda \rightarrow$ autovalor

$\therefore \lambda^3 = 1$ despejar la ecuacion con los autovalores

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

~~$\lambda = 1$~~
 $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

- 1 Su polinomio característico es $p_A(t) = t^2 - (\text{tr } A)t + \det A$
- 2 $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ ✓
- 3 $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$ ✓

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ |A| = 1 \end{array}$$

Pensar matriz $A = U^* D U^h$

Elegimos
matriz
unitaria U

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$U^* = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \neq I \quad \text{✓}$$

$$A^3 = I?$$

$$A = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = U \cdot D^3 \cdot U^*$$

$$\downarrow$$
$$U I U^* = U U^* = I$$

$$A^3 = I$$

Una matriz $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice *unitaria* si verifica

$$P^H P = P P^H = I$$

o, de manera equivalente, si $P^H = P^{-1}$.

En el caso particular de una matriz unitaria $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ resulta

$$P^t P = P P^t = I$$

y se dice que P es una matriz *ortogonal*.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz en base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el subespacio

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T}_b$ y determinar la de norma mínima.

2. Si las columnas de A son LI, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = A^\# b$. Si las columnas de A son LD, el sistema $A^T A \hat{x} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{x} = \hat{x}_p + \underbrace{\hat{x}_n}_{\in \text{Nul}(A)}$.

$$\hat{x} = A^\# \cdot b$$

pseudoinversa de $A \rightarrow A^\#$

Hallar generadores de S

$$S: x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -2x_1 - 2x_3, x_3)$$

$$S = \left\{ (1, -2, 0), (0, -2, 1) \right\}$$

$$S = \left\{ (1, -2, 0), (0, -2, 1) \right\}$$

$$S^\perp = (a, b, c) = \left(a, \frac{a}{2}, a \right)$$

$$S^\perp = \left\{ \left(1, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

$$S^\perp = \left\{ (2, 1, 2) \right\} \rightarrow \text{Nul}(A)$$

hallar bases de S^\perp

$$(a, b, c) \in S^\perp$$

$$\rightarrow (a, b, c) \cdot (1, -2, 0) = 0$$

$$\wedge (a, b, c) \cdot (0, -2, 1) = 0$$

$$b = \frac{a}{2}, \quad c = a$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b, \quad A^T = A$$

$$A \cdot A^T \hat{x} = A^T b$$

$$A \hat{x} = A b$$

$$A(\hat{x} - b) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\hat{x} - b \in \text{Nu}(A)$$

$$\hat{x} - b = \lambda(2, 1, 2)$$

$$\hat{x} = b + \lambda(2, 1, 2)$$

$$\hat{x} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 2)$$

sol!

$\lambda \in \mathbb{R}$

norma mínima?

$$\text{Col}(A) = \mathbb{F}_m(A) = \mathbb{F}_1(A)$$

$A^\#$

$$S = \left\{ (1, 0, -1), (0, 2, -1) \right\}$$

$$\vec{x} = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 2) = \mu(1, 0, -1) + \nu(0, 2, -1)$$

$$(1+2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) = (\mu, 2\nu, -\mu + \nu)$$

$$a = -\frac{1}{7}, \quad b = -\frac{2}{7}, \quad \cancel{c} = -\frac{4}{7}$$

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

4. Sea Q la forma cuadrática en \mathbb{R}^3 definida por $Q(x) = 4\|x\|^2 - 2\|P_S(x)\|^2$, donde P_S es la proyección ortogonal sobre el subespacio $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$. Hallar el valor máximo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $\|x\| = 2$ y determinar los vectores que lo realizan.

1) Hallar base de S

$$x_1 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = x_3, \quad x_2 = x_1$$

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \} \Rightarrow S = \{ (1, 1, 1) \}$$

4.2 Expresión de la proyección y la reflexión

Sea S un subespacio de V , y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ una BOG de S . Entonces $\forall x \in V$:

$$\|P_S(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^q \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \cdot v_i \right\|$$

$$\|P_S(x)\| = \frac{|\langle v, x \rangle|}{\sqrt{3}} = \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{\sqrt{3}} \quad \text{reemplazo en } Q(x)$$

$$Q(x) = 4\|x\|^2 - 2\|p(x)\|^2$$

$$Q(x) = \frac{10}{3}x_1^2 + \frac{10}{3}x_2^2 + \frac{10}{3}x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{4}{3}x_1x_3 - \frac{4}{3}x_2x_3$$

$$Q(x) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{pmatrix} 10/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 10/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A

$$\|x\|^2 = \|(x_1, x_2, x_3)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores de A

eigenvalues (2/3)*{{5,-1,-1},{-1,5,-1},{-1,-1,5}}



NATURAL LANGUAGE



MATH INPUT

Input

eigenvalues

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Corresponding eigenvectors

$$\lambda_1 = 4$$

$$v_1 = (-1, 0, 1)$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\lambda_3 = 2$$

$$v_3 = (1, 1, 1)$$

$$S_1 = \{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1, 1)\}$$

Teorema de Rayleigh: sea la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, con A simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{\min}(A) \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_{\max}(A)$$

$$\text{Máx} \Rightarrow \lambda_{\min} \|x\|^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$$

Los máximos se alcanzan en el autoespacio asociado a λ_{\max} , (4), norma 2

$$S_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

$$\lambda_{\min} = a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 0)$$

